Suites, Séries > | Suites | Cv, Dv | Comp Asymp | Séries | Termes >0 | Signe qcq | Doubles

Séries doubles

On admet que les manipulations ensemblistes classiques (produits finis, réunions dénombrables) d'ensembles dénombrables fournissent encore des ensembles dénombrables. On remarquera en particulier que l'ensemble $\N\times\N$ *est dénombrable. Aucune difficulté ne sera soulevée sur ces notions, qui ne sont pas exigibles des étudiants, et tout exercice ou problème y faisant référence devra impérativement les rappeler.*

Théorème

Soit I un ensemble dénombrable infini (par exemple $\N^{2}$), indexé par $\N$ sous la forme $I=\left\{ \varphi(n)\mid n\in\N\right\}$ où φ est une bijection de $\N$ dans I. Si la série $\ds\sum_{n\geqslant0}{u_{\varphi(n)}}$ converge absolument, alors sa somme est indépendante de l'indexation φ, et pourra également être notée $\ds\sum_{i\in I}{u_{i}}$ (par exemple $\ds\sum_{(k,\ell)\in\N^{2}}{u_{k,\ell}}$).

Définition

On dit alors que la série est absolument convergente (ou converge absolument).

Théorème

Toutes les opérations (somme, produit, regroupement par paquets, etc.) sont alors licites. Ainsi, sous réserve de convergence absolue :

- Si $\ds I=\bigsqcup_{j\in J}{I_{j}}$ (union disjointe) avec J un ensemble dénombrable et I_{j} des ensembles dénombrables pour tout j, alors : $$\ds\sum_{i\in I}{u_{i}}=\sum_{j\in J}{\sum_{k\in I_{j}}{u_{k}}}$$ En particulier : $$\ds\sum_{i=0}^{+\infty}{\left(\sum_{j=0}^{+\infty}{u_{i,j}}\right)}=\sum_{j=0}^{+\infty}{\left(\sum_{i=0}^{+\infty}{u_{i,j}}\right)}$$ $$\ds\sum_{i=0}^{+\infty}{\left(\sum_{j=i}^{+\infty}{u_{i,j}}\right)}=\sum_{j=0}^{+\infty}{\left(\sum_{i=0}^{j}{u_{i,j}}\right)}$$
- Si I et J sont des ensembles dénombrables, alors : $$\ds\left(\sum_{i\in I}{u_{i}}\right)\times\left(\sum_{j\in J}{v_{j}}\right)=\sum_{(i,j)\in I\times J}{u_{i}v_{j}}$$

On admet que les théorèmes ou les techniques classiques concernant les séries s'étendent dans ce cadre.

Exemples

1. Nature et somme éventuelle de la série $\ds\sum{\frac{\lambda^{i+j}}{i!j!}}$ avec $\lambda\in\R$.
2. Calculer $\ds\sum_{n=0}^{+\infty}{\sum_{k=n}^{+\infty}{\frac{1}{k!}}}$.
   1. Soit $\ds\sum_{(i,j)\in\N^{2}}{u_{i,j}}$ une série (double) absolument convergente de

somme S. On pose : $$\ds\forall n\in\N,\; I_{n}=\left\{(i,j)\in\N^{2}\;\mid\; i+j=n\right\}$$ Justifier que : $$\ds S=\sum_{n=0}^{+\infty}{\left(\sum_{(i,j)\in I_{n}}{u_{i,j}}\right)}$$

2. Nature et somme éventuelle de la série $\ds\sum_{(i,j)\in\N^{2}}{\frac{1}{(i+j)!}}$.
3. Soit x et y deux réels. Nature et somme éventuelle de $\ds\sum_{(i,j)\in\N^{2}}{\frac{x^{i}y^{j}}{(i+j)!}}$.

Suites, Séries >	Suites	Cv, Dv	Comp Asymp	Séries	Termes >0	Signe qcq	Doubles