Convexité ou concavité sur un intervalle

Définition

- On dit qu'une fonction f est **convexe** sur I si et seulement si : $$\ds\forall(x,y)\in I^{2},\;\forall\lambda\in[0,1],\; f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
- On dit que f est **concave** sur I si et seulement si $-f$ est convexe sur I c'est à dire si et seulement si: $$\ds\forall(x,y)\in I^{2},\;\forall\lambda\in[0,1],\; f(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$
- On appelle **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_{f}$ tout point $(x_{I},f(x_{I}))$ en lequel f est convexe (resp. concave) sur $\left]x_{I}-\alpha,x_{I}\right]$ et concave (resp. convexe) sur $\left[x_{I},x_{I}+\alpha\right[$ pour un certain réel $\alpha>0$.

__Remarques : Interprétation graphique__

- La fonction f est convexe (resp. concave) sur I si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_{f}$ est au-dessous (resp. au-dessus) de n'importe laquelle de ses cordes sur le segment délimité par la corde en question, une corde étant un segment d'extrémité $A\left(x_{A},f(x_{A})\right)$ et $B\left(x_{B},f(x_{B})\right)$ où $(x_{A},x_{B})\in I^{2}$.
- Regarder comment est positionnée une corde qui passe par un point d'inflexion.

Théorème : Généralisation de l'inégalité de convexité

On suppose que f est convexe sur I. Alors : $$\ds\forall n\in\N^{*},\forall(x_{1},\dots,x_{n})\in I^{n},\forall(\lambda_{1},\dots,\lambda_{n})\in[0,1]^{n},$$$$\ds\lambda_{1}+\dots+\lambda_{n}=1\;\implies\;\ f(\lambda_{1}x_{1}+\dots+\lambda_{n}x_{n})\leqslant\lambda_{1}f(x_{1})+\dots+\lambda_{n}f(x_{n})$$

Théorème : Convexité et classe C^1

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors :

- f est convexe (resp. concave) sur I si et seulement si f' est croissante (resp. décroissante) sur I,
- $\mathcal{C}_{f}$ admet un point d'inflexion en $(x_{I},f(x_{I}))$ si et seulement si f' est croissante (resp. décroissante) avant x_{I} et décroissante (resp. croissante).

__Remarques : Interprétation graphique__

- La fonction f est convexe (resp. concave) sur I si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_{f}$ est au-dessus (resp. au-dessous) de n'importe laquelle de ses tangente sur

tout le domaine I.
- Regarder comment est positionnée une tangente en un point d'inflexion.

Théorème

On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I. Alors :

- f est convexe (resp. concave) sur I si et seulement si f'' est positive (resp. négative) sur I,
- $\mathcal{C}_{f}$ admet un point d'inflexion en $(x_{I},f(x_{I}))$ si et seulement si f'' est positive (resp. négative) avant x_{I}, négative (resp. positive) après x_{I} et $f''(x_{I})=0$.

Remarque

Il convient de noter que l'hypothèse $\mathcal{C}^1$ peut sembler superflue au premier abord puisqu'on a l'impression que l'on pourrait se contenter de l'hypothèse dérivable mais un théorème permet de montrer qu'une fonction convexe et dérivable sur un intervalle est nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle !

Fct num >	Fct/Appl	Limites	Asymptote	Continuité	Dérivabilité	Convexité