

[Appli liné](#) > [Généralités](#) [Poly annul](#) [Matrice](#) [Chang base](#)

Généralités sur les applications linéaires

Dans ce paragraphe, E et F sont deux K -espaces vectoriels.

Définition

- Une application $u: E \rightarrow F$ est dite **linéaire** si et seulement si :

$$\forall (\lambda, \mu) \in K^2, \forall (x, y) \in E, u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)$$
 L'ensemble des telles applications linéaires est noté $\mathcal{L}(E, F)$.
 Si une telle application est bijective, on l'appelle **isomorphisme** de E dans F (on dit aussi que E et F sont isomorphes).
- Dans le cas où $F = E$, ces applications sont appelées **endomorphismes** de E et l'ensemble des endomorphismes est noté $\mathcal{L}(E)$. Si une telle application est aussi bijective, on l'appelle **automorphisme** de E et l'ensemble des automorphismes se note $\mathcal{GL}(E)$.
- Dans le cas où $F = K$, ces applications sont appelées **formes linéaires** sur E .

Théorème

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors :

- $u(v_0) = v_0$
- $\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, u(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 u(x_1) + \dots + \lambda_n u(x_n)$
- $\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, u(\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)) = \text{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n))$
- u est injective si et seulement si l'image de toute famille libre dans E est libre dans F
- u est surjective si et seulement si l'image d'une famille génératrice de E est génératrice de F
- u est bijective (donc isomorphisme) si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F .

Théorème : Construction d'une application linéaire

Soit (x_1, \dots, x_n) une base de E et (y_1, \dots, y_n) une famille de vecteurs de F . Alors : $\exists! u \in \mathcal{L}(E, F), \forall i \in \{1, \dots, n\}, u(x_i) = y_i$

Théorème : Structure d'espace vectoriel (et d'algèbre)

- L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel (comme sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de E dans F), c'est à dire que toute combinaison linéaire d'applications linéaires est encore une application linéaire.
- Si E et F sont de dimension finie alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et on a :

$\dim(\mathcal{L}(E,F)) = \dim(E) \times \dim(F)$ En particulier :

$$\dim(\mathcal{L}(E)) = \dim(E)^2$$

- La composée, lorsqu'elle existe, de deux applications linéaires u et v est encore une application linéaire. Dans le cas où ce sont aussi des isomorphismes alors $v \circ u$ est un isomorphisme et : $(v \circ u)^{-1} = u^{-1} \circ v^{-1}$

Remarques

- L'ensemble $\mathcal{GL}(E)$ n'est pas un espace vectoriel : si $u \in \mathcal{GL}(E)$ alors $1 \cdot u + (-1) \cdot u = \theta \notin \mathcal{GL}(E)$.
- En algèbre linéaire, si $u \in \mathcal{L}(E)$ alors la notation u^n désigne la composée $\underbrace{\underbrace{u \circ \dots \circ u}_n}_{\text{facteurs}}$ (définie par récurrence: $u^0 = \text{Id}_E$ et $u^{n+1} = u^n \circ u = u \circ u^n$).

Théorème : Formule du binôme de Newton

Soit u et v deux endomorphismes de E tels que $\boxed{v \circ u = u \circ v}$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, (u+v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k \circ v^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{n-k} \circ v^k$$

Définition : Noyau et image

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- On appelle **noyau** de u l'ensemble : $\text{Ker}(u) = \{v \in E \mid u(v) = 0\}$
- On appelle **image** de u l'ensemble : $\text{Im}(u) = \{v \in F \mid \exists x \in E, u(x) = v\}$
- Lorsque l'image de u est de dimension finie, sa dimension est appelée rang de u et se note $\text{rg}(u)$.

Théorème : Noyau/image et injectivité/surjectivité

Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors :

- $\text{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F
- l'application u est injective si et seulement si $\text{Ker}(u) = \{0_E\}$
- l'application u est surjective si et seulement si $\text{Im}(u) = F = u(E)$.

Théorème : Théorème du rang

On suppose que E est de dimension finie (peu importe pour F). Soit $u \in \mathcal{L}(E,F)$.

- On a : $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u) = \dim(\text{Ker}(u)) + \dim(\text{Im}(u))$

- Dans le cas où $F=E$, les propositions suivantes sont équivalentes :
 - u est injective
 - u est surjective
 - u est bijective

Remarque

Lorsque $\dim(F)=\dim(E)$ et $F \neq E$, le dernier résultat n'est pas utilisable tel quel même s'il est valide, on revient à l'utilisation du premier point.

Exemples

1. Déterminer tous les endomorphismes u de \mathbb{R}^2 tels que : $u^2 = \text{Id}$.
2. Soit E un K -espace vectoriel de dimension finie. Soit f et g deux endomorphismes de E tels que :

$$g \circ \text{Id}_E \circ f \circ g = \text{Id}_E \circ f \circ g \circ \text{Id}_E$$
 1. Justifier que $\text{Im}(g) \subset \text{Ker}(f)$ puis que $E = \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$.
 2. En déduire que $\text{Ker}(f) = \text{Im}(g)$ puis que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = \text{Ker}(g) \oplus \text{Im}(g)$.

Définition

On appelle **hyperplan** de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle.

Théorème

On suppose que E est de dimension finie. Tout hyperplan de E est de dimension finie égale à $\dim(E)-1$.

Définition

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E . On dit que F est **stable** par u si et seulement si $u(F) \subset F$, c'est à dire si et seulement si :

$$\forall x \in F, u(x) \in F$$

Exemples

1. Déterminer les sous-espaces d'un espace vectoriel E stables par Id_E puis par Id_E .
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $D = \text{Vect}(x)$ (vecteur non nul). Déterminer une CNS portant sur x pour que la droite D soit stable par u .
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in K$. Montrer que $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$ est stable par u .
4. Soit $u : K^2 \rightarrow K^2, (x, y) \mapsto (x+y, x-y)$. Justifier que u est linéaire puis déterminer tous les sous-espaces de K^2 stables par u .
5. Déterminer les sous-espaces stables par l'endomorphisme u de \mathbb{R}^3 représenté par la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$\end{pmatrix}$ dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Remarque

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E stable par u . Alors, l'application $u|_F : F \rightarrow F, v \mapsto u(v)$ est un endomorphisme de F appelé **endomorphisme induit** par u sur le sous-espace stable F .

[Appli liné >](#) [Généralités](#) [Poly annul](#) [Matrice](#) [Chang base](#)

From: <https://alainguichet.fr/ecs-touchard/wiki/> - ECS Touchard-Washington Le Mans

Permanent link: https://alainguichet.fr/ecs-touchard/wiki/doku.php?id=math:2:generalites_applications_lineaires&rev=1591343740

Last update: 2020/06/05 09:55

