# Changement de base

**Théorème : Théorème fondamental du changement de base**

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$, $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{E}}(u)$, $A'=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{E}'}(u)$ et $P=P_{\mathcal{B}_{E},\mathcal{B}_{E}'}$.
Alors :
$$A'=P^{-1}\times A\times P$$

## Exemple

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\R^{3}$. On considère les vecteurs de $\R^{3}$ suivant :
$$\vv{e_1}'=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\qquad\vv{e_2}'=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\qquad\vv{e_3}'=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   1. Montrer que $\mathcal{B}'=(\vv{e_1}',\vv{e_2}',\vv{e_3}')$ est une base de $\R^{3}$.
   2. Préciser la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. En déduire $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
2. Soit $p$ l'endomorphisme de $\R^{3}$ défini par :
   $$\ds p(\vv{e_1}')=\vv{e_1}'\qquad p(\vv{e_2}')=\vv{0}\qquad p(\vv{e_3}')=\vv{0}$$
   Préciser la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p)$ puis déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.

**Théorème**

Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\K)$ représentent le même endomorphisme exprimé dans deux bases différentes. En conséquence, deux matrices semblables ont le même rang.

## Exemples

1. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.
   1. Soit $A$ et $B$ deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\R)$ : $B=Q^{-1}AQ$ avec $Q\in\mathcal{GL}_n(\R)$.
      1. Montrer que : $\forall k\in\N,\;B^k=Q^{-1}A^kQ$.
      2. Montrer que : $\forall P\in\R[X],\; P(B)=Q^{-1}P(A)Q$.
      3. En déduire que $A$ et $B$ ont les mêmes polynômes annulateurs.
   2. Soit $(\lambda_{1},\dots,\lambda_{r})\in\R^{r}$ ($r\leqslant n$) des réels distincts deux à deux et $(m_{1},\dots,m_{r})\in(\N^{*})^{r}$ tels que :
      $$m_{1}+\dots+m_{r}=n$$On pose :
      $$D=\mathrm{diag}(\underset{m_{1}\text{ termes}}{\underbrace{\lambda_{1},\dots,\lambda_{1}}},\underset{m_{2}\text{ termes}}{\underbrace{\lambda_{2},\dots,\lambda_{2}}},\dots,\underset{m_{r}\text{ termes}}{\underbrace{\lambda_{r},\dots,\lambda_{r}}})\in\mathcal{M}_n(\R)$$

1. Montrer que :
$$\forall P\in\R[X],\; P(D)=\mathrm{diag}(\underset{m_{1}\text{ termes}}{\underbrace{P(\lambda_{1}),\dots,P(\lambda_{1})}},\dots,\underset{m_{r}\text{ termes}}{\underbrace{P(\lambda_{r}),\dots,P(\lambda_{r})}})$$
2. En déduire que une CNS pour que $P$ soit un polynôme annulateur de $D$.
3. On suppose que $A$ est semblable à $D$. Déterminer le polynôme unitaire de plus bas degré $P_{A}$ tel que $P_{A}(A)=\Theta$.


| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Appli liné >** | Généralités | Poly annul | Matrice | Chang base |