Changement de base

Théorème : Théorème fondamental du changement de base

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$, $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{E}}(u)$, $A'=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{E}'}(u)$ et $P=P_{\mathcal{B}_{E},\mathcal{B}_{E}'}$.
Alors :
$$A'=P^{-1}\times A\times P$$

Exemple

Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\R^{3}$. On considère les vecteurs de $\R^{3}$ suivant : $$\vv{e_1}'=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\qquad\vv{e_2}'=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\qquad\vv{e_3}'=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

    1. Montrer que $\mathcal{B}'=(\vv{e_1}',\vv{e_2}',\vv{e_3}')$ est une base de $\R^{3}$.
    2. Préciser la matrice $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. En déduire $P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
2. Soit p l'endomorphisme de $\R^{3}$ défini par :
   $$\ds p(\vv{e_1}')=\vv{e_1}'\qquad p(\vv{e_2}')=\vv{0}\qquad p(\vv{e_3}')=\vv{0}$$
   Préciser la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p)$ puis déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.

Théorème

Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\K)$ représentent le même endomorphisme exprimé dans deux bases différentes. En conséquence, deux matrices semblables ont le même rang.

Exemples

1. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.
    1. Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\R)$: $B=Q^{-1}AQ$ avec $Q\in\mathcal{GL}_n(\R)$.
        1. Montrer que : $\forall k\in\N,\;B^k=Q^{-1}A^kQ$.
        2. Montrer que : $\forall P\in\R[X],\; P(B)=Q^{-1}P(A)Q$.
        3. En déduire que A et B ont les mêmes polynômes annulateurs.
    2. Soit $(\lambda_{1},\dots,\lambda_{r})\in\R^{r}$ ($r\leqslant n$) des réels distincts deux à deux et $(m_{1},\dots,m_{r})\in(\N^{*})^{r}$ tels que : $$m_{1}+\dots+m_{r}=n$$On pose : $$D=\mathrm{diag}(\underset{m_{1}\text{ termes}}{\underbrace{\lambda_{1},\dots,\lambda_{1}}},\underset{m_{2}\text{ termes}}{\underbrace{\lambda_{2},\dots,\lambda_{2}}},\dots,\underset{m_{r}\text{ termes}}{\underbrace{\lambda_{r},\dots,\lambda_{r}}})\in\mathcal{M}_n(\R)$$
        1. Montrer que : $$\forall P\in\R[X],\; P(D)=\mathrm{diag}(\underset{m_{1}\text{

termes}}{\underbrace{P(\lambda_{1}),\dots,P(\lambda_{1})}},\dots,\underset{m_{r}\text{ termes}}{\underbrace{P(\lambda_{r}),\dots,P(\lambda_{r})}})$$

2. En déduire que une CNS pour que P soit un polynôme annulateur de D.
3. On suppose que A est semblable à D. Déterminer le polynôme unitaire de plus bas degré P_{A} tel que $P_{A}(A)=\Theta$.

Appli liné >	Généralités	Poly annul	Matrice	Chang base