Espaces et sous-espaces vectoriels

Définition

- Soit E un ensemble non vide. Un triplet $(E,+,\cdot)$ est appelé $\boldsymbol{\K}$**-espace vectoriel** si et seulement si les opérations : $$\ds\begin{array}{ccccc} + & \colon & E\times E & \to & E\\ & & \left(\vv{x},\vv{y}\right) & \mapsto & \vv{x}+\vv{y}\\ \cdot & \colon & \K\times E & \to & E\\ & & \left(\lambda,\vv{x}\right) & \mapsto & \lambda\cdot\vv{x} \end{array}$$vérifient les relations : $$\ds\begin{array}{ll} \forall\left(\vv{x},\vv{y}\right)\in E^{2},\;\vv{y}+\vv{x}=\vv{x}+\vv{y} & \forall\left(\lambda,\vv{x},\vv{y}\right)\in\K\times E^{2},\;\lambda\cdot\left(\vv{x}+\vv{y}\right)=\lambda\cdot\vv{x}+\lambda\cdot\vv{y}\\ \forall\left(\vv{x},\vv{y},\vv{z}\right)\in E^{2},\;\vv{x}+\left(\vv{y}+\vv{z}\right)=\left(\vv{x}+\vv{y}\right)+\vv{z} & \forall\left(\lambda,\mu,\vv{x}\right)\in\K^{2}\times E,\;(\lambda+\mu)\cdot\vv{x}=\lambda\cdot\vv{x}+\mu\cdot\vv{x}\\ \exists\vv{0_E}\in E\;/\;\forall\vv{x}\in E,\;\vv{x}+\vv{0_E}=\vv{0_E}+\vv{x}=\vv{x} & \forall\left(\lambda,\mu,\vv{x}\right)\in\K^{2}\times E,\;\lambda\cdot\left(\mu\cdot\vv{x}\right)=(\lambda\mu)\cdot\vv{x}\\ \forall\vv{x}\in E,\;\exists!\vv{y}\in E\;/\;\vv{x}+\vv{y}=\vv{y}+\vv{x}=\vv{0_E} & \forall\vv{x}\in E,\;1_{\K}\cdot\vv{x}=\vv{x} \end{array}$$
- Les éléments de E sont appelés **vecteurs** et les éléments de $\K$ des **scalaires**.
- On appelle **combinaison linaire** des vecteurs $\left(\vv{x_1},\dots,\vv{x_n}\right)$ de E tout vecteur de la forme $\lambda_{1}\cdot\vv{x_1}+\dots+\lambda_{n}\cdot\vv{x_n}$ où $(\lambda_{1},\dots,\lambda_{n})\in\K^{n}$.

Remarques

- Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note E à la place de $(E,+,\cdot)$ et on ne note pas le point de la multiplication externe.
- Les espaces vectoriels usuels sont : $\K^{n}$, $\mathcal{M}_n(\K)$, $\mathcal{M}_{n,p}(\K)$, $\mathcal{A}(I,\R)$ où $I\subset\R$, $\R^{\N}$ (suites réelles), $\K[X]$, $\K_n[X]$.
- Dans tout le restant de ce chapitre, E désigne un $\K$-espace vectoriel.

Définition

Soit F un sous-ensemble de E. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si et seulement si F est non vide et $(F,+,\cdot)$ est un espace vectoriel pour les opérations de E restreintes, au départ et à l'arrivée, à F.

Théorème : Caractérisation d'un sous-espace vectoriel

Soit F un sous-ensemble non vide de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si : $$\ds\forall(\lambda,\mu)\in\K^{2},\;\forall\left(\vv{x},\vv{y}\right)\in F^{2},\;\lambda\vv{x}+\mu\vv{y}\in F$$ (on peut omettre le scalaire μ dans la caractérisation). Autrement dit, F est stable par combinaisons linéaires.

Remarques

- Quelques sous-espaces vectoriels usuels ($n\geqslant1$) :
  - $\mathcal{C}^{\infty}(I,\R)\subset\mathcal{C}^n(I,\R)\subset\mathcal{C}^1(I,\R)\subset\mathcal{C}^0(I,\R)\subset\mathcal{\mathcal{A}}(I,\R)$
  - $\C_{0}[X]\subset\C_{1}[X]\subset\C_{2}[X]\subset\C_{n}[X]\subset\C[X]$
- L'ensemble des combinaisons linéaires de $\left(\vv{x_1},\dots,\vv{x_n}\right)$ est un sous-espace vectoriel de E noté $\mathrm{Vect}\left(\vv{x_1},\dots,\vv{x_n}\right)$.

Exemples

1. Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
   1. Montrer que $F\cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
   2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $F\cup G$ soit un sous-espace vectoriel de E.
2. Pour quelles valeurs de $a\in\R$, l'ensemble $\ds E_{a}=\left\{ \left.\begin{pmatrix}x\\ y\\ z \end{pmatrix}\in\R^{3}\,\right|\;3x-2y+5z=a\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\R^{3}$?
3. Montrer que l'ensemble $\ds\left\{ \left. \begin{pmatrix}a & b & \dots & b\\ b & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & & \ddots & b\\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \right| \;(a,b)\in\R^{2}\right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\R)$.

Esp vect >	Ev, Sev	Fam vect	Mat passage	Somme sev