

## EXERCICE 1

On considère deux vecteurs non nuls de  $\mathbb{R}^3$  notés  $\bar{w}_1$  et  $\bar{w}_2$ .

On munit  $\mathbb{R}^3$  du produit scalaire canonique, que l'on notera  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . On note  $\| \cdot \|$  la norme associée.

On note  $H = \text{Vect}(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$  et  $H^\perp$  l'orthogonal de  $H$  pour le produit scalaire canonique de  $\mathbb{R}^3$ .

On note  $f$  l'application qui à tout vecteur  $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$  associe  $f(\bar{u}) = \langle \bar{u}, \bar{w}_2 \rangle \bar{w}_1 + \langle \bar{u}, \bar{w}_1 \rangle \bar{w}_2$ .

1. **Préliminaire** : On note  $M = \begin{pmatrix} a & c^2 \\ b^2 & a \end{pmatrix}$ , où  $a$  est un réel et  $b$  et  $c$  deux réels strictement positifs.

(a) Montrer que les valeurs propres de  $M$  sont  $a - bc$  et  $a + bc$ .

(b) On note  $E_\lambda$  le sous-espace propre de  $M$  associé à la valeur propre  $\lambda$ .

Montrer que  $E_{a-bc} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} c \\ -b \end{pmatrix}\right)$  et  $E_{a+bc} = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}\right)$ .

2. (a) Montrer que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

(b) Montrer que  $H^\perp \subset \text{Ker}(f)$  et que  $\text{Im}(f) \subset H$ .

3. On suppose **dans cette question uniquement** que la famille  $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$  est liée et on note  $\bar{w}_2 = \theta \bar{w}_1$ .

Justifier que  $\theta \neq 0$  puis établir que  $\frac{1}{2\theta\|\bar{w}_1\|^2} f$  est la projection orthogonale sur  $H$ .

4. On suppose **dans cette question uniquement** que la famille  $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$  est libre.

(a) Soit  $\bar{u}$  un vecteur de  $\text{Ker}(f)$ . Montrer que  $\langle \bar{u}, \bar{w}_2 \rangle = \langle \bar{u}, \bar{w}_1 \rangle = 0$ .

En déduire  $\text{Ker}(f) = H^\perp$  puis  $\text{Im}(f) = H$ .

(b) Calculer  $f(\bar{w}_1)$ ,  $f(\bar{w}_2)$  et justifier que la restriction de  $f$  à  $H$  est représentée

dans la base  $(\bar{w}_1, \bar{w}_2)$  de  $H$  par la matrice :  $A = \begin{pmatrix} \langle \bar{w}_1, \bar{w}_2 \rangle & \|\bar{w}_2\|^2 \\ \|\bar{w}_1\|^2 & \langle \bar{w}_1, \bar{w}_2 \rangle \end{pmatrix}$ .

On note  $B' = (\|\bar{w}_2\|\bar{w}_1 - \|\bar{w}_1\|\bar{w}_2, \|\bar{w}_2\|\bar{w}_1 + \|\bar{w}_1\|\bar{w}_2)$ .

Montrer que  $B'$  est une base orthogonale de  $H$  puis établir grâce à la question 1 que  $B'$  est formée de vecteurs propres de  $f$ , dont on précisera la valeur propre associée.

(c) Soient  $\bar{w}_3$  un vecteur non nul de  $H^\perp$  et  $B'' = (\|\bar{w}_2\|\bar{w}_1 - \|\bar{w}_1\|\bar{w}_2, \|\bar{w}_2\|\bar{w}_1 + \|\bar{w}_1\|\bar{w}_2, \bar{w}_3)$ .

Montrer que  $B''$  est une base orthogonale de  $\mathbb{R}^3$  et former la matrice de  $f$  dans la base  $B''$ . Justifier que  $f$  est un endomorphisme symétrique.

(d) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer alors que  $f$  admet : une valeur propre  $\lambda_1 < 0$ , une valeur propre  $\lambda_2 > 0$  et la valeur propre 0.

5. Réciproquement on note  $r$  et  $s$  deux réels strictement positifs, et  $g$  un endomorphisme symétrique de  $\mathbb{R}^3$ , de valeurs propres  $-2r^2$ , 0 et  $2s^2$ .

(a) Que peut-on dire des sous-espaces propres associés, respectivement notés  $\mathcal{E}_-$ ,  $\mathcal{E}_0$ ,  $\mathcal{E}_+$  ?

(b) Soient  $\bar{v} \in \mathcal{E}_-$  et  $\bar{w} \in \mathcal{E}_+$  deux vecteurs propres de  $g$  de norme égale à 1.

Soient  $\bar{w}_1' = r\bar{v} + s\bar{w}$ ,  $\bar{w}_2' = -r\bar{v} + s\bar{w}$ .

Montrer que pour tout vecteur  $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$ ,  $g(\bar{u}) = \langle \bar{u}, \bar{w}_2' \rangle \bar{w}_1' + \langle \bar{u}, \bar{w}_1' \rangle \bar{w}_2'$ .

## EXERCICE 2

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :  $f(0) = 0$  et si  $t > 0$ ,  $f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$ .

1. Montrer que pour tout polynôme  $P$  à coefficients réels,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)e^{-x} = 0$ .

2. Etude d'une suite de polynômes  $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

On définit pour tout l'exercice  $R_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $R_{n+1} = -X^2 R_n' + X^2 R_n$ .

- (a) Vérifier que  $R_1 = X^2$  et  $R_2 = -2X^3 + X^4$ . Calculer  $R_3$ .
- (b) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ , le monôme de plus bas degré de  $R_n$  est  $(-1)^{n+1} n! X^{n+1}$ . Donner sans démonstration son monôme de plus haut degré.
- (c) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Etablir :  $\lim_{t \rightarrow 0} R_n\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}} = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} R_n\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}} = 0$ .  
Ces égalités sont-elles valables pour  $n = 0$  ?

3. Classe  $C^\infty$  de  $f$  : Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on notera  $f^{(n)}$  la dérivée  $n$ -ième de  $f$ ,  $f^{(0)}$  désignant  $f$  elle-même.

- (a) Justifier que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $]0; +\infty[$ .
- (b) Montrer que pour tout entier naturel  $n$  et pour tout réel  $t > 0$  :  $f^{(n)}(t) = R_n\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{1}{t}}$   
et en déduire que si  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\lim_{t \rightarrow 0} f^{(n)}(t) = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} f^{(n)}(t) = 0$ .
- (c) Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f$  est de classe  $C^n$  sur  $\mathbb{R}^+$  et  $f^{(n)}(0) = 0$ .

4. On note  $E$  l'ensemble des polynômes  $P$  à coefficients réels vérifiant  $P(0) = 0$ .

- (a) Montrer que  $E$  est un espace vectoriel et que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $R_n \in E$ .  
Montrer que pour tout  $P \in E$ ,  $P(x)$  est négligeable devant  $x^{\frac{3}{4}}$  au voisinage de 0.

Pour tout couple  $(P, Q)$  d'éléments de  $E$ , on note :  $\varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P\left(\frac{1}{t}\right)Q\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{2}{t}} dt$ .

- (b) Montrer que  $P\left(\frac{1}{t}\right)Q\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{2}{t}}$  est négligeable devant  $(t^{-\frac{3}{2}})$  au voisinage de  $+\infty$ .

En utilisant la question 1, montrer que  $\lim_{t \rightarrow 0} P\left(\frac{1}{t}\right)Q\left(\frac{1}{t}\right)e^{-\frac{2}{t}} = 0$ .

En déduire que l'intégrale définissant  $\varphi(P, Q)$  est convergente.

- (c) Montrer que  $\varphi$  définit un produit scalaire sur  $E$ .
- (d) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Etablir :  $\varphi(R_n, R_{n+1}) = \int_0^{+\infty} f^{(n)}(t) f^{(n+1)}(t) dt$ .

Que vaut  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left( f^{(n)}(t) \right)^2$  ? En déduire que  $R_n$  et  $R_{n+1}$  sont orthogonaux pour  $\varphi$ .

- (e) Plus généralement, montrer que si  $p$  est un entier naturel supérieur à 2, et  $s$  un entier naturel non nul,  $\varphi(R_p, R_s) = -\varphi(R_{p-1}, R_{s+1})$  (on utilisera une intégration par parties).

En déduire que si  $p$  et  $s$  sont de parités différentes,  $R_p$  et  $R_s$  sont orthogonaux pour  $\varphi$ .

### EXERCICE 3

Un étudiant fréquente deux cybercafés  $C_A$  et  $C_B$ .

Dans  $C_A$ , il paye 2 euros la première demi-heure puis 1 euro pour la demi-heure suivante si elle est entamée puis 3 euros par heure supplémentaire entamée.

Dans  $C_B$ , il paye  $R$  euros par heure entamée ( $R$  désignant une constante strictement positive).

Par exemple pour une session de 1h 40, il paiera  $2 + 1 + 3$  € dans  $C_A$ , contre  $2R$  € dans  $C_B$ .

De même, pour une session de 32 minutes, il paiera  $2 + 1$  € dans  $C_A$ , contre  $R$  € dans  $C_B$ .

Enfin pour une session de 30 minutes, il paiera  $2$  € dans  $C_A$ , contre  $R$  € dans  $C_B$ .

On suppose ici que la durée, exprimée en heures, passée par un étudiant sur un ordinateur au cours d'une session unique, est une variable aléatoire notée  $T$  qui suit la loi exponentielle de paramètre  $\alpha > 0$ .

1. Soit  $B$  la variable aléatoire égale au coût de la session dans le cybercafé  $C_B$ .

- (a) Justifier que  $B(\Omega) = \{kR, k \in \mathbb{N}^*\}$ .
- (b) Montrer que  $P(B = kR) = P(k - 1 < T \leq k)$ .  
En déduire que pour tout entier naturel  $k$  non nul,  $P(B = kR) = e^{-\alpha(k-1)}(1 - e^{-\alpha})$ .
- (c) Quelle est la loi de la variable  $Z = \frac{1}{R}B$ ? En déduire l'espérance de  $B$ .

2. Soit  $A$  la variable aléatoire égale au coût de la session dans le cybercafé  $C_A$ .

- (a) Justifier que  $A(\Omega) = \{2\} \cup \{3k, k \in \mathbb{N}^*\}$ .
- (b) Montrer que  $P(A = 2) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{2}}$  et  $P(A = 3) = e^{-\frac{\alpha}{2}} - e^{-\alpha}$ .
- (c) Montrer que pour tout entier naturel  $k \geq 2$ ,  $P(A = 3k) = e^{-\alpha(k-1)}(1 - e^{-\alpha})$ .
- (d) Calculer  $\sum_{k=2}^{+\infty} (3k e^{-\alpha(k-1)}(1 - e^{-\alpha}))$  et en déduire  $E(A) = e^{-\frac{\alpha}{2}} - 1 + \frac{3}{1 - e^{-\alpha}}$ .
- (e) Dans cette question uniquement on suppose que  $\alpha = 2 \ln 2$ .

Montrer que  $E(A) - E(B) = \frac{4}{3}(2,625 - R)$ . Quel forfait horaire maximum doit proposer le cybercafé  $C_B$  pour concurrencer  $C_A$ ? (en euros et centimes d'euros).

3. On examine le temps de connexion pour  $n$  clients ( $n \geq 2$ ) dont on suppose les temps de connexion (notés  $T_1, T_2, \dots, T_n$ ) mutuellement indépendants, ces temps suivant tous une loi exponentielle

de paramètre  $\alpha$ . On note  $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$ .

- (a) Justifier que  $S_n$  suit une loi gamma ( $\Gamma$ ) dont on précisera une densité.
- (b) Montrer que la variable  $U_n = \frac{1}{S_n}$  admet une espérance et la calculer.
- (c) En déduire en fonction de  $U_n$  un estimateur sans biais du paramètre  $\alpha$ .