ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Année 2006

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

EXERCICE 1

Les questions 2 , 3 et 4 sont indépendantes de la question 1.

On considère la matrice $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et l'endomorphisme h de $\mathbb{R}^3$ représenté par la matrice H relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On note également $\lambda_1 = 1 - \sqrt{2}$ et $\lambda_2 = 1 + \sqrt{2}$.

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel n , il existe deux réels a_n et b_n tels que $H^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 & b_n \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ b_n & 0 & a_n + 2b_n \end{pmatrix}$ et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

   (b) Pour tout entier naturel n , exprimer b_{n+2} en fonction de b_{n+1} et b_n, puis en déduire b_n en fonction de n, λ_1 et λ_2.

   (c) Pour tout entier naturel non nul n, exprimer a_n en fonction de n, λ_1 et λ_2.

2. (a) Montrer que H est diagonalisable.

   (b) Montrer par la méthode du pivot que les valeurs propres de H sont -2, λ_1 et λ_2.

   (c) Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de h.
   Justifier que cette base est orthogonale pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$.

3. On considère ici l'application $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \longmapsto {}^tXHX$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

   (a) Justifier que q est une forme quadratique et exprimer $q((x, y, z))$ en fonction de x, y, z.

   (b) Que peut-on dire du signe de q ? Justifier sa réponse.

4. On considère le sous-ensemble D de $\mathbb{R}^3$ défini par $D = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]-1; +\infty[$, ainsi que la fonction f définie sur D par : $f(x, y, z) = x \ln(1 + z) + (y - 1)^2(z - 1) + 2z$.

   (a) Montrer que f est de classe C^2 sur D.

   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f. Montrer que f ne présente qu'un point critique M_0.

   (c) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f. En déduire la Hessienne de f au point M_0.

   (d) Le point M_0 est-il un maximum, un minimum, ou un point col pour f ?

EXERCICE 2

On considère un réel $\alpha > 0$ et la suite $(un)_{n\geqslant 2}$ définie par : $u_n = \dfrac{1}{n\ln^{\alpha+1}(n)}$.

On note , pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$.

1. Soit la fonction f définie sur $I =]-1;+\infty[$ par $f(x) = -\dfrac{1}{\alpha\ln^{\alpha}(x)}$.

   (a) Montrer que f est de classe C^2 sur I et calculer sa dérivée f'. Montrer que f est concave sur I.

   (b) Etudier la nature et la valeur éventuelle de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln^{\alpha+1}(t)}dt$.

   En déduire la nature de la série de terme général u_n.

   (c) Soit un entier $k \geqslant 2$. Montrer que pour tout réel $t \in [k;k+1]$, $u_{k+1} \leqslant f'(t)$.

   (d) En déduire que pour tout entier k supérieur ou égal à 2, $u_{k+1} \leqslant \dfrac{1}{\alpha\ln^{\alpha}(k)} - \dfrac{1}{\alpha\ln^{\alpha}(k+1)}$.

Dans toute la suite , on note $L = \displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} u_k$ *et pour tout entier* n *supérieur ou égal à* 2 : $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

2. (a) Justifier l'existence de R_n. Exprimer R_n à l'aide de L et S_n.

   (b) Soit p et n deux entiers tels que $2 \leqslant n < p$.

   Montrer grâce au **1.d.** que : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{p} u_k \leqslant \frac{1}{\alpha\ln^{\alpha}(n)} - \frac{1}{\alpha\ln^{\alpha}(p)}$.

   (c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 : $0 \leqslant L - S_n \leqslant \dfrac{1}{\alpha\ln^{\alpha}(n)}$.

3. (a) Montrer que : $\dfrac{1}{\alpha\ln^{\alpha}(n)} \leqslant \varepsilon \Longleftrightarrow n \geqslant \exp\left[(\alpha\varepsilon)^{-\frac{1}{\alpha}}\right]$.

   (b) Compléter les parties pointillées du programme Turbo-Pascal suivant afin qu'il demande deux réels strictement positifs α et ε et affiche un entier naturel n et une somme partielle S_n tels que l'écart entre S_n et L soit inférieur à ε : (on rappelle que `trunc` est la fonction partie entière).

```
program esc2006;
var S , epsilon , alpha :  real ;
k , n :  integer ;
begin
writeln (..................................) ;
readln (...............) ;
readln (...............) ;
n:=trunc(exp(exp(...........................)))+1 ;
S :=0 ;
for k := 2 to n do ............................;
writeln (...........................) ;
end .
```

   (c) On suppose que les valeurs $\alpha = 10$ et $\varepsilon = 10^{-6}$ ont été entrées.
   Y aura-t-il une erreur due à un débordement à l'exécution de ce programme ?
   (on prendra 2^{15} comme plus grand entier possible pour le type integer et on donne $\ln(2) \simeq 0,69$)

EXERCICE 3

Le préliminaire n'est utilisé qu'en **2.e** et **2.f**.
Toutes les variables aléatoires sont définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1. **Préliminaires**

   Soit $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ une suite de variables aléatoires admettant une espérance $E(Y_n)$ et une variance $V(Y_n)$. On suppose en outre que $\lim\limits_{n\to+\infty} E(Y_n) = m$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} V(Y_n) = 0$.
   (m étant une constante réelle).

   (a) Montrer que $E\left((Y_n - m)^2\right) = V(Y_n) + (E(Y_n) - m)^2$.

   (b) En déduire par inégalité de Markov que pour tout $\varepsilon > 0$,
   $$P(|Y_n - m| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(Y_n) + (E(Y_n) - m)^2}{\varepsilon^2}$$

   (c) Montrer alors que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à m.

   Dans la suite de cet exercice on considère une suite $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ de variables indépendantes et de même loi.
   Pour tout entier naturel non nul n, on note M_n la variable aléatoire définie sur Ω par $M_n(\omega) = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} X_i(\omega)$. (M_n prend donc pour valeur la plus grande des valeurs prises par $X_1, X_2, ..., X_n$ et on remarque que $M_1 = X_1$).

2. On suppose ici que les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $q = 1-p$.

   (a) Montrer que $(M_2 = 0) = ((X_1 = 0) \cap (X_2 = 0))$ et en déduire la loi de M_2.

   (b) Montrer plus généralement que M_n suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - q^n$.

   (c) Soient r et s deux entiers tels que $1 \leqslant r \leqslant s$. Montrer que si $(M_r = 1)$ alors $(M_s = 1)$. En déduire $E(M_r M_s) = 1 - q^r$, puis calculer la covariance $\mathrm{cov}(M_r, M_s)$.

   (d) Donner la matrice de variance-covariance des variables $(M_1, M_2, ..., M_n)$.

   (e) Déduire du préliminaire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge en probabilite vers la variable certaine égale à 1.

   (f) Montrer que $(n(1 - M_n))_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 0.

3. On suppose ici que les variables $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^\times}$ sont des variables à densité indépendantes, de loi uniforme sur $[0,1]$.

   (a) Rappeler la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1]$.

   (b) En déduire que pour tout réel x de $[0,1]$, $P(M_n \leqslant x) = x^n$.
   Montrer que M_n est une variable à densité.

   (c) Soit ε un réel de $]0,1]$. Calculer $P(|M_n - 1| \leqslant \varepsilon)$.

   (d) En déduire que $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge en probabilité vers la variable certaine égale à 1.

   (e) Soit α un réel positif.

      i. Soit n un entier strictement supérieur à α.
      Montrer que : $P\left(n(1 - M_n) \leqslant \alpha\right) = 1 - \left(1 - \dfrac{\alpha}{n}\right)^n$.

      ii. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{\alpha}{n}\right)^n = e^{-\alpha}$.

      iii. En déduire que $(n(1 - M_n))_{n\in\mathbb{N}^\times}$ converge en loi vers une variable qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.