ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

On désigne pour tout entier naturel non nul n : $E_n = \mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes à coefficients réels qui sont soit le polynôme nul , soit de degré inférieur ou égal à n.
Pour tout polynôme P de E_n , on note P' le polynôme dérivé de P.
On définit sur E_n l'application f, qui à tout polynôme P associe le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P) = (X^2 - 1)P' - (nX + 1)P$$

1. Propriétés générales.

   (a) Calculer $f(X^n)$, $f(1)$. Calculer $f(P)$ pour $P = X^k$, $k \in \{1,..,n-1\}$ et $n \geqslant 2$.
   Quelles sont les valeurs de $k \in \{0,..,n\}$ pour lesquelles le degré de X^k est égal à celui de $f(X^k)$?

   (b) Montrer que f est un endomorphisme de E_n.

   (c) Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de E_n $(1,X,..,X^n)$

2. Etude pour des valeurs particulières de n.

   (a) On suppose dans cette question seulement que $n = 1$.
   Trouver les valeurs propres de A.
   Déterminer les vecteurs propres de l'endomorphisme f.

   (b) On suppose dans cette question seulement que $n = 2$.
   Trouver les valeurs propres de A.
   Déterminer les vecteurs propres de l'endomorphisme f.

3. On suppose désormais que n est un entier naturel non nul quelconque.

   (a) Montrer que si un polynôme P est vecteur propre de l'endomorphisme f, alors P est de degré n.

   (b) On considère les polynômes $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ tels que pour tout $k \in \{0,..,n\}$:

   $$P_k(X) = (X-1)^k (X+1)^{n-k}$$

   Montrer que pour tout $k \in \{0,..,n\}$, $\quad f(P_k) = (2k - n - 1)P_k$.
   En déduire les valeurs propres et vecteurs propres associés de l'endomorphisme f.
   L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
   Pour quelles valeurs de n est-il bijectif ? (on justifiera ses réponses).

Exercice 2

On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires à densité indépendantes, de densités respectives u et v , alors $U + V$ est une variable à densité dont une densité w est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$w(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v(x-t)dt$$

Les candidats devront adopter la notation suivante pour les fonctions de répartition :
F_U est la fonction de répartition de U , F_V est la fonction de répartition de V , et ainsi de suite pour les différentes variables aléatoires rencontrées dans l'énoncé.

1. Soient X et Y deux variables indépendantes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

   (a) Quelle est la loi de $(-Y)$?

   (b) Montrer que $X - Y$ admet pour densité la fonction, h définie par :

   $$\forall z \in \mathbb{R}, \quad h(z) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda |z|}$$

(c) En déduire que la variable $|X-Y|$ suit une loi exponentielle de paramètre λ.

2. Trois personnes A,B,C se rendent à la poste au même instant pour téléphoner.
Il n'y a que deux cabines, que prennent A et B, et C attend.
On suppose que les durées de communication téléphonique de chacun, notées, X_A,X_B,X_C sont des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle de paramètre λ.

   (a) Vérifier que C sort le dernier de la poste si et seulement si l'événement $(|X_A - X_B| < X_C)$ est réalisé.
   (b) Montrer que la variable aléatoire $D = |X_A - X_B| - X_C$ admet h pour densité.
   En déduire la probabilité pour que C sorte le dernier.

3.

   (a) Soient Z et T deux variables aléatoires indépendantes qui suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs α et β, avec $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\alpha \neq \beta$.
   Déterminer la loi de $Z + T$.
   (b) Soit T_C la variable aléatoire égale au temps total passé par C à la poste.
   Déterminer la loi de la variable $M = \min(X_A, X_B)$ et en déduire la loi de T_C.

Exercice 3

On considère l'ensemble C des fonctions à valeurs réelles définies et continues sur $\mathbb{R}_+$.
Soit φ l'application qui à toute fonction f fait correspondre $\varphi(f) = F$ définie par :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$$

On note D_F l'ensemble de définition de la fonction F.

1. Expliciter la fonction F, en précisant son ensemble de définition D_F , dans les cas suivants :

   (a) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\quad f(t) = 1$
   (b) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\quad f(t) = e^t$
   (c) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\quad f(t) = t$

2. Soit L l'ensemble des fonctions définies, positives et continues sur $\mathbb{R}_+$ telles que :

$$\forall m \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \lim_{t \to +\infty} e^{-mt} f(t) = 0$$

   (a) Montrer que si f et g sont éléments de L alors $f + g \in L$, et que les fonctions $t \mapsto t^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ sont éléments de L.
   (b) On considère $f \in L$ et $x \in \mathbb{R}_+^\times$.
   Montrer la convergence de l'intégrale $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t)dt$.
   (On admettra que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(t) = e^{-\frac{xt}{2}} f(t)$est bornée).

3. Etude de la dérivabilité de F.

   (a) Montrer que l'on a :

$$\forall u \in [0, +\infty[, \quad e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2} e^u \leqslant 0 \text{ et } \forall u \in]-\infty, 0], \quad e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2} \leqslant 0$$

   (On posera deux fonctions et on calculera jusqu'à leur dérivée seconde)
   En déduire que pour tout réel $u : 0 \leqslant e^u - 1 - u \leqslant \frac{u^2}{2} e^{|u|} \qquad (*)$

(b) Soient $f \in L$ et $n \in \mathbb{N}$. En remarquant que $e^{-mt} = e^{-\frac{mt}{2}} e^{-\frac{mt}{2}}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^n f(t)$ appartient à L.

(c) Soient $f \in L$, $F = \varphi(f)$ et $x \in \mathbb{R}_+^\times$.

Montrer que pour tout réel h tel que $|h| < \dfrac{x}{2}$:

$$0 \leqslant F(x+h) - F(x) + h \int_0^{+\infty} t f(t) e^{-xt} dt \leqslant \frac{h^2}{2} \int_0^{+\infty} t^2 f(t) e^{-\frac{xt}{2}}\, dt$$

(On pourra poser $u = -ht$ dans l'inégalité (*)).

(d) En déduire que si $f \in L$, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\times$ et exprimer, pour $x > 0$, $F'(x)$ sous forme d'intégrale.