ASSEMBLEE DES CHAMBRES FRANCAISES DE COMMERCE ET D'INDUSTRIE

EPREUVES ESC

CONCOURS D'ADMISSION SUR CLASSES PREPARATOIRES

MATHEMATIQUES

OPTION SCIENTIFIQUE

Année 1999

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à encadrer, dans la mesure du possible, les résultats de leurs calculs. Ils ne doivent faire usage d'aucun document ;

L'usage de toute calculatrice ou de tout matériel électronique est interdit pendant cette épreuve.

Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Exercice 1

Partie A

Soit u l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, de matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Identifier: $u^2 - 3u + 2Id_{\mathbb{R}^3}$.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de u.
3. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Partie B

E est un espace vectoriel réel de dimension n $(n \geqslant 1)$.
u est un endomorphisme de E vérifiant: $u^2 - 3u + 2Id_E = 0$.

1. On pose: $v = u - Id_E$ et $w = u - 2Id_E$.
   (a) Identifier $(v - w)$ et en déduire que: $E = Im(v) + Ker(w)$.
   (b) Identifier $v \circ w$ et $w \circ v$; en déduire que: $Im(w) \subset Ker(v)$ et $Im(v) \subset Ker(w)$.
   (c) Montrer que: $E = Ker(v) \oplus Ker(w)$.
   (d) Prouver que u est diagonalisable.
2. (a) Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que:
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u^n = a_n u + b_n Id_E$ (avec la convention: $u^0 = Id_E$).
   Donner les valeurs de $a_0,\ b_0,\ a_1$ et b_1.
   (b) Etablir que: $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$.
   En déduire les expressions de a_n et b_n, en fonction de n.
   (c) Exprimer u^n en fonction de n, u et Id_E.

Exercice 2

Dans tout l'exercice, les propriétés de la fonction Γ, définie par $\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt$, seront utilisées sans démonstration.

Partie A

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction Γ.
2. Donner la valeur de $\Gamma(n)$, pour $n \in \mathbb{N}^\times$.
3. Ecrire, pour $x \in \mathbb{R}^{+\times}$, la relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.
4. En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{2t}$, calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$.

   En déduire $\Gamma(\frac{3}{2})$ et $\Gamma(\frac{5}{2})$.

Partie B

1. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)\, dt$ est absolument convergente.

   On note alors f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(tx)\, dt$.

2. Montrer que: $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leqslant \sqrt{\pi}$.

3. (a) Etablir l'inégalité: $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |\cos a - \cos b| \leqslant |a-b|$.

   (b) En déduire que: $\forall (x,x_0) \in \mathbb{R}^2,\ |f(x) - f(x_0)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}|x-x_0|$.

   (c) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

4. (a) Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale $\int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)\, dt$ est convergente.

   On pose alors, pour tout réel x: $g(x) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\sin(tx)\, dt$.

   (b) Etablir successivement que :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ |\cos a - \cos b + (a-b)\sin b| \leqslant \frac{(a-b)^2}{2}$$

$$\forall x_0 \in \mathbb{R},\ \forall h \in \mathbb{R}^\times,\ |\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + g(x_0)| \leqslant \frac{3\sqrt{\pi}}{8}|h|$$

   (c) En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer f' en fonction de g.

Partie C

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par: $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \cos(t)\, dt$.

1. Prouver que: $\forall n \in \mathbb{N}^\times,\ |u_n| \leqslant e^{-n\pi}$.

2. Etablir que la série de terme général u_n converge et que: $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = f(1)$.

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
Une urne U_n contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule, en appliquant la règle suivante : si une boule tirée porte le numéro k, avant de procéder au tirage suivant, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k.
On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U_n de toutes ses boules.

Partie A

1. Donner la loi de X_1, la loi de X_2 et leurs espérances.

2. Déterminer la loi de X_3 et calculer $E(X_3)$.

3. Déterminer la loi de X_4 et calculer $E(X_4)$.

Partie B

On étudie désormais le cas général.

1. Calculer $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = n)$.
2. Soit N_1, la variable aléatoire égale au numéro de la première boule tirée.
   (a) Reconnaître la loi de N_1.
   (b) Vérifier que $\forall i \in [\![2, n]\!],\ \forall k \in [\![2, n]\!],\ P(X_n = k/N_1 = i) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leqslant k-1 \\ P(X_{i-1} = k-1) & \text{si } i \geqslant k \end{cases}$
   (c) Montrer que: $\forall k \in [\![2, n]\!],\ P(X_n = k) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=k-1}^{n-1} P(X_i = k-1)$.

   On pourra admettre les résultats (b) et (c) pour résoudre les questions suivantes.
3. Calculer $P(X_n = 2)$.
4. Pour $n \geqslant 2$, on pose : $v_n = n!P(X_n = n-1)$.
   (a) Etablir que: $\forall n \geqslant 2,\ v_{n+1} = v_n + n$.
   (b) En déduire $P(X_n = n-1)$.

Partie C

1. Montrer que: $\forall n \geqslant 2,\ E(X_n) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n-1} E(X_i) + 1$.
2. En déduire que: $\forall n \geqslant 2,\ E(X_n) = E(X_{n-1}) + \dfrac{1}{n}$.
3. Montrer enfin que: $\forall n \geqslant 1,\ E(X_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.