



**BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES**

---

**Concepteur : EM LYON**

---

**Code sujet**  
**296**  
**EML\_MATE**

Première épreuve (option économique)

## **MATHÉMATIQUES**

Mardi 29 avril 2008 de 8 heures à 12 heures

*Les candidats ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*

*Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

---

Tournez S.V.P.

## EXERCICE 1

On admet l'encadrement suivant :  $2,7 < e < 2,8$ .

### Partie I : Étude d'une fonction

On considère l'application  $f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $t \in ]0; +\infty[$ , par :

$$f(t) = \begin{cases} t \ln t - t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que  $f$  est continue sur  $]0; +\infty[$ .
2. Justifier que  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $]0; +\infty[$  et calculer  $f'(t)$  pour tout  $t \in ]0; +\infty[$ .
3. Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .
4. Dresser le tableau des variations de  $f$ .
5. Montrer que  $f$  est convexe sur  $]0; +\infty[$ .
6. On note  $\Gamma$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormal  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .
  - a. Montrer que  $\Gamma$  admet une demi-tangente en  $O$ .
  - b. Déterminer les points d'intersection de  $\Gamma$  avec l'axe des abscisses.
  - c. Préciser la nature de la branche infinie de  $\Gamma$ .
  - d. Tracer  $\Gamma$ .

### Partie II : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On considère l'application  $G : ]1; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $x \in ]1; +\infty[$ , par :

$$G(x) = \frac{1}{2} \int_{x-1}^{x+1} f(t) dt.$$

1. Montrer que  $G$  est de classe  $C^2$  sur  $]1; +\infty[$  et que, pour tout  $x \in ]1; +\infty[$  :

$$G'(x) = \frac{1}{2}(f(x+1) - f(x-1))$$

$$\text{et } G''(x) = \frac{1}{2}(\ln(x+1) - \ln(x-1)).$$

À cet effet, on pourra faire intervenir une primitive  $F$  de  $f$  sans chercher à calculer  $F$ .

2.
  - a. Montrer que  $G'$  est strictement croissante sur  $]1; +\infty[$ .
  - b. Vérifier :  $G'(2) > 0$ .
  - c. Établir que l'équation  $G'(x) = 0$ , d'inconnue  $x \in ]1; +\infty[$ , admet une solution et une seule, notée  $\alpha$ , et que  $\alpha < 2$ .

### Partie III : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application  $\Phi : ]1; +\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  définie, pour tout  $(x, y) \in ]1; +\infty[^2$ , par :

$$\Phi(x, y) = (y - f(x+1))^2 + (y - f(x-1))^2, \text{ où l'application } f \text{ est définie dans la partie I.}$$

1. Justifier que  $\Phi$  est de classe  $C^2$  sur  $]1; +\infty[^2$  et calculer les dérivées partielles premières de  $\Phi$  en tout  $(x, y)$  de  $]1; +\infty[^2$ .
2. Vérifier que  $(\alpha, f(\alpha+1))$  est un point critique de  $\Phi$ , où  $\alpha$  est défini en II 2.c.
3. Est-ce que  $\Phi$  admet un extrémum local en  $(\alpha, f(\alpha+1))$  ?

## EXERCICE 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

### Partie I : Réduction simultanée de $A$ et $B$

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de  $A$ .
2. En déduire une matrice carrée  $P$  d'ordre trois, inversible, de deuxième ligne  $(-1 \ 1 \ 1)$ , telle que  $A = PDP^{-1}$ , et calculer  $P^{-1}$ .
3. Calculer la matrice  $C = P^{-1}BP$  et vérifier que  $C$  est diagonale.

### Partie II : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note  $E$  l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application  $f : E \longrightarrow E$  qui, à toute matrice  $M$  carrée d'ordre trois, associe  $f(M) = AM - MB$ .

1. Donner la dimension de  $E$ .
2. Vérifier que  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .
3. Soit  $M \in E$ . On note  $N = P^{-1}MP$ , où  $P$  est définie en I.2 .
  - a. Montrer :  $M \in \text{Ker}(f) \iff DN = NC$ .
  - b. Déterminer les matrices  $N$  carrées d'ordre trois telles que :  $DN = NC$ .
  - c. Montrer que l'ensemble des matrices  $N$  carrées d'ordre trois telles que  $DN = NC$  est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.
4.
  - a. En déduire la dimension de  $\text{Ker}(f)$ , puis la dimension de  $\text{Im}(f)$ .
  - b. Donner au moins un élément non nul de  $\text{Ker}(f)$  et donner au moins un élément non nul de  $\text{Im}(f)$ .

## EXERCICE 3

Les parties I et II sont indépendantes.

### Partie I : Étude d'une variable aléatoire

1. Soit  $h$  la fonction définie sur l'intervalle  $[0; 1]$  par :

$$\forall x \in [0; 1], \quad h(x) = \frac{x}{2-x}.$$

a. Montrer que  $h$  est une bijection de  $[0; 1]$  sur  $[0; 1]$  et, pour tout  $y \in [0; 1]$ , exprimer  $h^{-1}(y)$ .

b. Déterminer deux réels  $\alpha$  et  $\beta$  vérifiant :  $\forall x \in [0; 1], \quad h(x) = \alpha + \frac{\beta}{2-x}$ .

c. Calculer  $\int_0^1 h(x)dx$ .

2. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle  $[0; 1]$ .

a. Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire  $X$ .

b. Pour tout réel  $y$  de  $[0; 1]$ , déterminer la probabilité de l'événement  $\left(\frac{X}{2-X} \leq y\right)$ .

c. Montrer que la variable aléatoire  $Y = \frac{X}{2-X}$  admet une densité et déterminer une densité  $g$  de  $Y$ .

d. Montrer que  $Y$  admet une espérance  $E(Y)$  et déterminer  $E(Y)$ .

### Partie II : Étude d'un temps d'attente

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2. Une réunion est prévue entre  $n$  invités que l'on note  $I_1, I_2, \dots, I_n$ . Chaque invité arrivera entre l'instant 0 et l'instant 1.

Pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on modélise l'instant d'arrivée de l'invité  $I_k$  par une variable aléatoire  $T_k$  de loi uniforme sur l'intervalle  $[0; 1]$ . On suppose de plus que, pour tout réel  $t$ , les  $n$  événements  $(T_1 \leq t), (T_2 \leq t), \dots, (T_n \leq t)$  sont indépendants.

1. Soit un réel  $t$  appartenant à  $[0; 1]$ . Pour tout entier  $k$  tel que  $1 \leq k \leq n$ , on note  $B_k$  la variable aléatoire de Bernoulli prenant la valeur 1 si l'événement  $(T_k \leq t)$  est réalisé et la valeur 0 sinon.

On note  $S_t = B_1 + B_2 + \dots + B_n$ .

a. Que modélise la variable aléatoire  $S_t$  ?

b. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $S_t$ .

2. Soit  $R_1$  la variable aléatoire égale à l'instant de la première arrivée.

a. Soit un réel  $t$  appartenant à  $[0; 1]$ . Comparer l'événement  $(R_1 > t)$  et l'événement  $(S_t = 0)$ .

b. Montrer que la variable aléatoire  $R_1$  admet une densité et en déterminer une.

3. Soit  $R_2$  la variable aléatoire égale à l'instant de la deuxième arrivée.

Montrer que la variable aléatoire  $R_2$  admet une densité et en déterminer une.

★ ★ ★