

2

# Mathématiques

Option Economique

■ Mercredi 21 avril 2010 de 8h00 à 12h00

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":  
8 h 00 – 13 h 20*

Aucun document n'est autorisé.  
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages.

*Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.*

## EXERCICE 1.

Soit  $E$  un espace vectoriel et  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . Pour tout réel  $a$ , on considère l'endomorphisme  $f_a$  de l'espace vectoriel  $E$  dont la matrice dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$  est donnée par :

$$M_a = \begin{pmatrix} a+2 & -(2a+1) & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ainsi que la fonction polynômiale  $Q$  qui à tout réel  $x$  associe le réel :

$$Q(x) = x^3 - (a+2)x^2 + (2a+1)x - a.$$

### I. Recherche des valeurs propres de $f_a$ .

1. Montrer que le réel  $\lambda$  est une valeur propre de  $f_a$  si et seulement si  $\lambda$  est racine du polynôme  $Q$ .
2. Vérifier que le réel  $\lambda = 1$  est racine de  $Q$ .
3. En déduire les racines de  $Q$  ainsi que leur nombre en fonction de  $a$ .
4. Lorsque  $a = 1$ , l'endomorphisme  $f_1$  est-il diagonalisable ?

### II. Réduction de la matrice $M_a$ .

Dans toute la suite de l'exercice on suppose  $a$  différent de 1.

Soit  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  la famille de vecteurs de  $E$  définie par :

$$\begin{cases} e'_1 = a^2 e_1 + a e_2 + e_3 \\ e'_2 = e_1 + e_2 + e_3 \\ e'_3 = 2e_1 + e_2. \end{cases}$$

1. Prouver que  $\mathcal{B}'$  est une base de  $E$ .  
On note  $P_a$  la matrice de passage de la base  $\mathcal{B}$  à la base  $\mathcal{B}'$ .
2. Montrer que  $e'_1$  est un vecteur propre de  $f_a$ .
3. Vérifier que le sous-espace vectoriel  $F$  engendré par les vecteurs  $e'_2$  et  $e'_3$  est stable par  $f_a$  c'est-à-dire :

$$f_a(F) \subset F.$$

- Donner l'expression de la matrice  $T_a$  de l'endomorphisme  $f_a$  dans la nouvelle base  $\mathcal{B}'$ .
- Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :

$$T_a^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où, par convention, on pose  $T_a^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

### III. Etude d'une suite récurrente linéaire.

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite de nombres réels définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 = 1, & u_1 = -1, & u_2 = 0. \\ \text{Pour tout entier naturel } n : & u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n. \end{cases}$$

- Vérifier que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

- Etablir par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P_2 T_2^n P_2^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$$

- Donner l'expression matricielle de la matrice inverse de  $P_2$  puis exprimer  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente ?

## EXERCICE 2

On considère l'application  $\varphi$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}.$$

## I. Résolution de l'équation $\varphi(x) = 1$ .

- Déterminer la limite de  $\varphi(x)$  lorsque  $x$  tend vers 0 par valeurs positives.  
Interpréter graphiquement cette limite.
- Déterminer la limite de  $\varphi(x)$  lorsque  $x$  tend vers  $+\infty$ .  
Interpréter graphiquement cette limite.
- Prouver que  $\varphi$  est strictement monotone sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- Dresser le tableau de variation de  $\varphi$  et y faire apparaître les limites de  $\varphi$  en  $0^+$  et  $+\infty$ .
- On rappelle que  $\ln(2) \simeq 0,7$  et  $\ln(3) \simeq 1,1$ .  
Montrer que l'équation  $\varphi(x) = 1$  possède une unique solution notée  $\alpha$  et que :

$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

- Proposer un programme en Pascal permettant d'encadrer  $\alpha$  dans un intervalle d'amplitude  $10^{-2}$ .

## II. Une variable à densité.

Soit  $\alpha$  le réel défini à la question I.5. On considère la variable aléatoire réelle  $X$  dont une densité de probabilité est donnée par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leq \alpha. \end{cases}$$

- Vérifier que  $f$  est bien une densité de probabilité.
- Montrer que  $X$  admet une espérance  $E(X)$ .
- Démontrer que pour  $x > \alpha$  :

$$xf(x) = \varphi'(x) + \frac{1}{x^2}.$$

En déduire que l'espérance de  $X$  est donnée par :

$$E(X) = \frac{1 - \alpha}{\alpha}.$$

Donner un encadrement de  $E(X)$  par deux entiers consécutifs.

- La variable aléatoire réelle  $X$  admet-elle une variance ?

## EXERCICE 3

Dans cet exercice, on étudie des situations probabilistes liées à un jeu de dés à six faces.

Pour ce jeu, effectuer une partie consiste à lancer successivement deux dés équilibrés.

On note :

- $D_1$  le résultat du premier dé et  $D_2$  le résultat du deuxième dé,
- $E_1$  l'événement : « $D_1 < D_2$ »,  $E_2$  l'événement : « $D_1 = D_2$ » et  $E_3$  l'événement : « $D_1 > D_2$ ».

Lors d'une partie,

- si l'événement  $E_1$  se produit alors le joueur ne marque pas de point,
- si l'événement  $E_2$  se produit alors le joueur marque 2 points,
- si l'événement  $E_3$  se produit alors le joueur marque 1 point.

### I. Etude de parties successives.

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Le joueur joue successivement  $n$  parties.

Pour tout entier naturel  $i \geq 1$ , on note :

- $X_i$  la variable aléatoire représentant le nombre de points marqués lors de la  $i^{\text{ème}}$  partie ;
- $Y_i$  le nombre de points marqués après  $i$  parties.

1. Calculer la probabilité de chacun des événements  $E_1$ ,  $E_2$  et  $E_3$ .
2. Soit  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , déterminer la loi de la variable aléatoire  $X_i$  puis calculer son espérance et sa variance.
3. Trouver la loi de la variable aléatoire  $Y_1$ .
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire  $Y_2$  ?
5. (a) Préciser l'ensemble  $Y_3(\Omega)$  des valeurs prises par la variable aléatoire  $Y_3$ .  
(b) Construire et remplir le tableau de la loi conjointe du couple  $(Y_2, Y_3)$ .  
*On justifiera précisément une valeur non nulle de ce tableau, les autres pouvant être données directement.*  
(c) En déduire la loi de la variable aléatoire  $Y_3$ .

Tournez la page s.v.p.

6. (a) Ecrire  $Y_n$  en fonction des variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .  
En déduire l'espérance mathématique et la variance de  $Y_n$ .
- (b) En moyenne, combien de parties au minimum doit faire le joueur pour obtenir plus de 10 points ?

## II. Etude du temps d'attente.

Le joueur joue maintenant jusqu'à ce qu'il dépasse un nombre de points donné. Plus précisément on note :

$T_1$  (respectivement  $T_2$ ) la variable aléatoire représentant le nombre de parties effectuées par le joueur lorsque le total de ses points est supérieur ou égal à 1 (respectivement 2) pour la première fois (si cet événement se produit).

Par exemple si les points marqués par le joueur sont dans l'ordre :

**Exemple 1** : 0 0 1 0 1 2 ..... alors  $T_1 = 3$  et  $T_2 = 5$ .

**Exemple 2** : 0 0 0 2 1 2... alors  $T_1 = 4$  et  $T_2 = 4$ .

- (a) Préciser l'ensemble  $T_1(\Omega)$  des valeurs prises par la variable aléatoire  $T_1$  puis, pour tout  $k$  appartenant à  $T_1(\Omega)$ , donner la valeur de la probabilité  $P(T_1 = k)$ .
- (b) Donner la valeur de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire  $T_1$ .
- (a) Déterminer l'ensemble  $T_2(\Omega)$  des valeurs prises par la variable aléatoire  $T_2$ .
- (b) Calculer les probabilités  $P(T_2 = 1)$  et  $P(T_2 = 2)$ .
- (c) Prouver que, pour  $k \geq 3$ , on a :

$$P(T_2 = k) = \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{1}{6} + (k-1) \left(\frac{5}{12}\right)^{k-1} \times \frac{7}{12}.$$

- (d) Ce résultat est-il valable pour  $k = 1$  et  $k = 2$  ?
- (e) Etablir que :  $\sum_{k=1}^{+\infty} P(T_2 = k) = 1$ .
- (f) Que peut-on en déduire pour l'événement « le joueur n'obtient jamais un score cumulé supérieur ou égal à 2 » ?
- (g) Calculer  $E(T_2)$ .

