ecricome
www.ecricome.org

CONCOURS D'ADMISSION 2007

3

Mathématiques

Option Technologique

Mercredi 18 avril 2007 de 8 h 00 à 12 h 00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":
8 h 00 – 13 h 20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 5 pages

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Tournez la page s.v.p.

1. EXERCICE.

On considère la fonction f déterminée sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 1 + \frac{x - 1 + \ln x}{x^2}$$

On se propose dans cet exercice d'étudier la fonction f et de la représenter relativement à un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, l'unité choisie étant le cm.

1.1. Etude d'une fonction g auxiliaire.

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad g(x) = x^3 - x + 3 - 2\ln x$$

1. Soit P la fonction polynôme déterminée $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

   a. Prouver que P est factorisable par $x - 1$.

   b. Ecrire $P(x)$ sous la forme d'un produit de $x - 1$ par un polynôme $Q(x)$ que l'on déterminera.

   c. Déterminer alors le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Vérifier que la fonction dérivée g' peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad g'(x) = \frac{P(x)}{x}$$

3. En déduire les variations de g sur son domaine d'étude.

4. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad g(x) > 0$$

1.2. Etude de la fonction f.

1. Déterminer la limite de $f\ (x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Que peut-on en déduire pour la représentation graphique de f, notée $\mathcal{C}_f$?

2. a. Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque que x tend vers $+\infty$.

b. Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

c. Montrer que sur $[1, +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la droite (Δ).

3. On donne le tableau de valeurs suivant :

x	$0,5$	3
$f(x)$	$-3,3$	$4,3$

a. Vérifier que la fonction dérivée f' peut s'écrire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \qquad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

b. En déduire les variations de f.

c. Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ et tracer la droite (Δ).

d. Hachurer la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}_f$, (Δ) et les deux droites d'équation $x = 1$ et $x = e$.

e. Ecrire, à l'aide d'une intégrale, la valeur de l'aire de la partie hachurée du plan.

f. A l'aide d'une intégration par parties, déterminer la valeur de cette intégrale.

2. EXERCICE.

On se propose de déterminer la suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

Pour tout entier naturel n : $\quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$
avec $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$

A cet effet on définit la matrice A par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2.1. Calcul de la puissance $n^{ème}$ de A.

On considère les matrices à coefficients réels B et C définies par :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Calculer BC et CB.
2. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul :
$$B^n = B \ , \qquad C^n = (-1)^{n-1}C$$
3. Vérifier que l'on a :
$$A^2 = 5A - 6I$$
où I est la matrice carrée unité d'ordre 2.
4. Etablir que la matrice A est-inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.
5. Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n :
$$A^n = 3^n B - 2^n C$$
La relation précédente est-elle encore vraie pour $n = -1$. C'est-à-dire a-t-on :
$$A^{-1} = \frac{1}{3}B - \frac{1}{2}C \ ?$$
6. Montrer que pour tout entier naturel n :
$$\left(A^{-1}\right)^n = \frac{1}{3^n}B - \frac{1}{2^n}C$$

2.2. Expression de u_n en fonction de n.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :
$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
3. Donner ainsi l'expression de u_n en fonction de n.

6. Plus impatient, un autre client décide de passer à la concurrence le jour où il attend plus de quatre unités à la caisse.
   On note Y la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de fois où ce client s'est présenté à la caisse de ce magasin avant de passer à la concurrence, si cet événement se produit.

   a. Déterminer la loi de Y.

   b. Donner la valeur de l'espérance et de la variance de Y.

3.2. Mode de paiement de la clientèle.

L'étude du mode de paiement en fonction du montant des achats a permis d'établir les probabilités suivantes :

$$P[S = 0 \cap U = 0] = 0.4$$
$$P[S = 0 \cap U = 1] = 0.3$$
$$P[S = 1 \cap U = 0] = 0.2$$
$$P[S = 1 \cap U = 1] = 0.1$$

où S représente la variable aléatoire prenant la valeur 0 si le montant des achats est inférieur ou égal à 50 euros, prenant la valeur 1 sinon, et U la variable aléatoire prenant la valeur 0 si la somme est réglée par carte bancaire, prenant la valeur 1 sinon.

1. Déterminer les lois de S et U .

2. Calculer la covariance du couple (S, U). Les variables S et U sont-elles indépendantes ?

3. Quelle est la probabilité que la somme réglée soit supérieure strictement à 50 euros sachant que le client utilise un autre moyen de paiement que la carte bancaire ?