

MATHEMATIQUES I

Option scientifique

Rémi CHMURA – Hervé GUILLAUMIE

Description du problème

L'épreuve, cette année, étudiait les propriétés de la solution bornée $U(f)$ de l'équation différentielle $y' - ay + f = 0$. La première partie débutait par l'explicitation de cette solution puis étudiait, notamment au travers d'exemples, certaines propriétés élémentaires de $U(f)$. Dans deux de ces exemples, on demandait au candidat de mettre en œuvre le calcul des puissances successives d'une matrice.

Dans la deuxième partie, on s'intéressait au comportement asymptotique de $U(f)$. Pour ce faire, on établissait d'abord des résultats d'intégration des relations de comparaison.

La troisième partie proposait d'obtenir, sous certaines conditions, l'existence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} U(f)$.

L'énoncé était construit de sorte que les candidats ne pouvaient rester bloqués par une question et progressaient dans le problème, sous réserve qu'ils fassent preuve d'attention et d'un bon esprit de synthèse. Les questions étaient de difficulté variée, certaines proches du cours et d'autres demandant de l'initiative et de la réflexion. Beaucoup de méthodes différentes, certaines astucieuses, ont été utilisées.

Dans l'ensemble, les correcteurs ont trouvé le sujet intéressant, bien construit, de longueur raisonnable. Il était conforme au programme et à son esprit. Néanmoins, certains ont regretté la longueur de la première partie et d'autres l'absence cette année d'une question d'algorithmique ; mais le sujet s'y prêtait mal.

56%, 26% et 18% des points ont été affectés aux trois parties décrites ci-dessus.

Commentaires sur la correction

Comme l'an passé, les correcteurs se sont plaints du manque de soin affiché par certains candidats. Les copies sales, ou peu lisibles ne peuvent qu'indisposer le correcteur. Heureusement, les copies restent en majorité convenablement présentées et on encouragera ici encore une fois les candidats à rédiger correctement et à mettre leurs conclusions en évidence.

De même, il faut rappeler une nouvelle fois aux candidats que seule la rigueur et l'honnêteté paient et que les fausses preuves, visiblement malhonnêtes, n'abusent pas le correcteur et déprécient fortement la copie.

Dans la partie I, si la première question est parfois judicieusement résolue par équivalence, la deuxième question sur l'unicité a connu peu de succès. Plus grave, à la question 1c, la convergence de l'intégrale a souvent été mal traitée (par encadrement !).

La question de l'injectivité de U a été discriminante et parmi les bonnes réponses, rares sont celles qui utilisent simplement l'équation E_f .

L'intégration par parties de la question 2d a rarement été faite correctement.

En 3b, si l'interprétation en terme d'éléments propres de la question 3a est comprise, il est rarement vérifié que $\frac{1}{a+k}$ décrit $\left]0, \frac{1}{a}\right]$. La question 3c a été catastrophique : les copies privilégient l'énoncé avec la formule intégrale pour les itérés de U au détriment d'une réponse algébrique simple. Pour le calcul de la limite, on voit peu de discussions suivant les valeurs de $\frac{1}{a+k}$.

Dans les exemples des questions 4 et 5, les questions d'algèbre donnent lieu à des réponses approximatives (stabilité de F_p) ou fausses (matrice M alors que $U(\sin)$ et $U(\cos)$ sont justes ...). Trop peu de copies proposent des méthodes cohérentes pour calculer les puissances nièmes des matrices.

Dans ces exemples, comme dans la question 8, on a constaté trop de fautes (de dérivation !) dans les intégrations par parties, par ailleurs trop souvent réalisées sans précaution de 1 à $+\infty$.

Enfin, dans 7 et 8, il fallait être lucide pour utiliser au mieux les résultats précédemment collectés et toujours faire attention aux hypothèses (dans 7, φ n'était pas dérivable !).

Dans la partie II, si les candidats vérifient rarement que $\int_1^{+\infty} \alpha$ converge, la question 1a est souvent bien traitée. C'est beaucoup plus confus dans 1b, où rares sont les copies qui utilisent $\alpha - \beta = o(\beta)$. L'application de ces questions en 2 et 4 est souvent bien comprise.

Dans la question 3a, si l'intégration par parties est correcte, la justification de l'équivalence est le plus souvent erronée.

La question 3b qui sortait du cadre du problème a néanmoins eu quelques réponses parfaitement argumentées que les correcteurs ont su apprécier.

Dans la partie III, on n'a souvent vu que la première question. Attention aux candidats qui en fin d'épreuve tente de grappiller des points et offrent là des tentatives de solutions souvent peu convaincantes et parfois peu honnêtes.

Conclusion

L'épreuve, par la diversité de ses questions et des procédés calculatoires à mettre en œuvre, a permis aux candidats rigoureux et adroits de faire montre de leurs connaissances, de leur capacité d'adaptation et de leur esprit de synthèse. Plusieurs excellentes copies ont d'ailleurs obtenu la note maximale. Au final, l'écart-type établi à 4,53 assure que l'épreuve a joué pleinement son rôle. On constatera avec une satisfaction mesurée que la moyenne générale de l'épreuve s'établit à 10,06.

Correcteurs : Gilles BENSON, Rémi CHMURA, Alain COMBROUZE, Jean-François COSSUTTA, Benoît GUGGER, Jean-Pierre GONET, Hervé GUILLAUMIE, Thierry LEGAY, Yves MONLIBERT, Jean-Pierre SIAU.