BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 285

Conception : ESCP BS

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 9 mai 2022, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

Dans les exercices 2 et 3, on note $P(B)$ la probabilité d'un événement B.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2 puis déterminer le réel α tel que $A^3 = \alpha A$.
   (b) En déduire, par l'absurde, que A n'est pas inversible.

Dans la suite, on se propose de déterminer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, la matrice A^n de deux façons différentes.

2. **Première méthode** (α désigne le réel déterminé à la question 1.(a)).
   (a) Montrer que $A^5 = \alpha^2 A$.
   (b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel p non nul, on a : $A^{2p-1} = \alpha^{p-1} A$.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel p non nul, on a : $A^{2p} = \alpha^{p-1} A^2$.

3. **Deuxième méthode**

(a) Déduire de la question 1.(a) les trois valeurs propres possibles de la matrice A.

(b) Montrer que le système $AX = -4X$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, est équivalent à $\begin{cases} y = -3z \\ x = z \end{cases}$.

En déduire une valeur propre de A et donner un vecteur propre associé.

(c) Résoudre le système $AX = 0$, d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, et en déduire une deuxième valeur propre de A. Vérifier qu'un vecteur propre associé est le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(d) Calculer le produit $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et en déduire la troisième valeur propre de A.

(e) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer les deux produits AP et PD.

(f) Soit $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer PQ puis en déduire que P est inversible et donner P^{-1}.

(g) Justifier que la matrice A est diagonalisable, puis montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. Écrire explicitement les neuf éléments de la matrice A^n (toujours avec $n \geqslant 1$).

Exercice 2

Soit a un réel tel que $0 < a \leqslant 1$. On considère la fonction f définie par :

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a^2} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant a \\[2ex] \dfrac{2a-t}{a^2} & \text{si } a < t \leqslant 2a \\[2ex] 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Dans le cas particulier où $a = 1$, tracer l'allure de la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, en prenant une unité suffisamment grande pour la clarté du dessin.

On revient au cas général où $0 < a \leqslant 1$.

3. (a) Déterminer les valeurs respectives des intégrales $\displaystyle\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_a^{2a} f(x)\mathrm{d}x$.

   (b) En déduire que f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire X.
4. (a) Montrer que X possède une espérance $E(X)$ et que $E(X) = a$.

   (b) Montrer que X^2 possède une espérance $E\left(X^2\right)$ et que $E\left(X^2\right) = \dfrac{7a^2}{6}$.

   (c) En déduire que X possède une variance $V(X)$ et la déterminer.

5. Dans cette question, on suppose que le paramètre a est inconnu et on souhaite en faire une estimation. À cet effet, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on considère n variables aléatoires, $X_1, X_2, \ldots, X_n$, indépendantes, suivant toutes la même loi que X, et on pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.
   (a) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $\overline{X}_n$.
   (b) En déduire que $\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais de a. Quel est son risque quadratique ?
6. On note ε un réel strictement positif.
   (a) Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour $\overline{X}_n$, puis établir l'inégalité :
   $$P\left(\left|\overline{X}_n - a\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{1}{6n\varepsilon^2}$$
   (b) En déduire l'inégalité :
   $$P\left(\overline{X}_n - \varepsilon \leqslant a \leqslant \overline{X}_n + \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{1}{6n\varepsilon^2}$$
   (c) On a réalisé 1000 simulations $X_1, X_2, \ldots, X_{1000}$ de la variable aléatoire X. Donner, en fonction de $\overline{X}_{1000}$ et en prenant $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{600}}$, l'intervalle de confiance pour a qui correspond à cette réalisation. Quel est le niveau de confiance de cet intervalle ?

Exercice 3

Une urne contient des boules rouges et des boules vertes.

- 20% de ces boules sont rouges et portent le numéro 1.
- Les autres boules portent le numéro 2 et, parmi elles, 10% sont rouges et les autres sont vertes.

1. On tire une boule de l'urne au hasard.
   (a) Quelle est la probabilité que cette boule soit rouge et porte le numéro 1 ?
   (b) Montrer que la probabilité que cette boule porte le numéro 2 est égale à 0, 8.
   (c) Montrer que la probabilité que cette boule soit rouge est égale à 0,28 .
2. On considère le jeu dont la règle est la suivante.
   Un joueur tire une boule au hasard de l'urne décrite au début de l'exercice.
   - Si la boule tirée est rouge et porte le numéro 1, le joueur gagne un euro.
   - Si la boule tirée est rouge et porte le numéro 2, le joueur gagne deux euros.
   - Si la boule tirée est verte, le joueur perd un euro.

   On note G la variable aléatoire égale au gain (positif ou négatif) de ce joueur.
   (a) Déterminer la loi de G.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de G.
3. Un joueur tire au hasard n boules ($n \geqslant 1$) de cette urne, une par une et avec remise, à chaque fois, de la boule tirée.
   On note R_n, V_n, U_n et D_n les variables aléatoires égales respectivement, au nombre de boules rouges obtenues, au nombre de boules vertes obtenues, au nombre de boules portant le numéro 1 obtenues, et enfin au nombre de boules portant le numéro 2 obtenues.
   (a) Donner les lois de R_n, V_n, U_n et D_n et en déduire leurs espérances respectives en fonction de n.
   (b) Que vaut $R_n + V_n$? Les variables aléatoires R_n et V_n sont-elles indépendantes ?
   Déterminer la covariance de R_n et V_n en fonction de n.
   (c) Que vaut $U_n + D_n$? Les variables aléatoires U_n et D_n sont-elles indépendantes ?
   Déterminer la covariance de U_n et D_n en fonction de n.

4. Un joueur participe n fois ($n \geqslant 1$) au jeu décrit à la question 2, en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne. On conserve les notations de la question 3 et on note G_n le gain, positif ou négatif, de ce joueur à l'issue des n tirages.
   (a) Établir la relation : $G_n = U_n + 2D_n - 3V_n$.
   (b) Donner l'espérance de G_n en fonction de n.

Exercice 4

1. On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$, et pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \text{ et } b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}\, b_n}$$

   Montrer que l'on définit ainsi deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels strictement positifs.
   On pourra procéder par récurrence sur n en montrant que, pour tout entier naturel n, les réels a_n et b_n sont bien définis et strictement positifs.

2. Compléter les commandes suivantes afin qu'elles affichent a_n et b_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n= input("entrez une valeur pour n")
a=1
b=2
for k = 1 : n
    a=---
    b=---
end
disp (a, "a=")
disp (b, "b=")
```

3. Calculer a_1 et vérifier que $b_1 = \sqrt{3}$.

4. (a) Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_{n+1}}}{2\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_{n+1}}\right)}(b_n - a_n)$$

   (b) En déduire par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $a_n < b_n$.
   (c) Utiliser l'inégalité précédente pour justifier que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
   (d) Montrer que $b_n = \dfrac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}}$, puis établir la stricte décroissance de la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. (a) Justifier, pour tout entier naturel n, l'inégalité :

$$b_{n+1} - a_{n+1} < \frac{1}{2}(b_n - a_n)$$

   En déduire l'encadrement suivant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < b_n - a_n \leqslant \frac{1}{2^n}$$

   (b) En utilisant les résultats obtenus à la question 4, établir, pour tout entier naturel n, les inégalités suivantes :

$$a_n < b_0 \text{ et } b_n > a_0$$

(c) Déduire de tout ce qui précède que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont même limite. On note ℓ cette limite commune.

(d) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$$

6. On donne $\pi \approx 3,14$ et $\sqrt{3} \approx 1,73$.
La limite commune ℓ aux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'un des quatre réels suivants :

(1) $\dfrac{\sqrt{3}}{\pi}$ (2) $\dfrac{3\sqrt{3}}{\pi}$ (3) $\dfrac{3}{\pi}$ (4) 3

Compte tenu de certains des résultats obtenus dans cet exercice, déterminer ℓ en justifiant votre réponse.

7. (a) Compléter le script *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche le plus petit rang n pour lequel on a l'inégalité : $b_n - a_n \leqslant 10^{-3}$.

```
n=0
a=1
b=2
while ----
    a=---
    b=---
    n=---
end
disp (n)
```

(b) Quelle est la valeur de l'entier affiché après exécution du script *Scilab* suivant ?

```
n=0
while 1/2^n>10^-3
    n=n+1
end
disp (n)
```

8. (a) Le script proposé à la question 7.(a) renvoie $n = 5$. Parmi les quatre réels $a_5, b_5, b_5 - a_5, a_6 - a_5$, lesquels sont des valeurs approchées de ℓ à moins de 10^{-3} près ?

(b) Expliquer pourquoi la valeur de n renvoyée par le script de la question 7.(b) n'est pas en contradiction avec celle renvoyée par le script de la question 7.(a).

FIN