ESSEC 2002, Option scientifique, MATHÉMATIQUES I

Dans la suite, on désigne par n un nombre entier supérieur ou égal à 2 et par $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
On rappelle qu'un polynôme non nul est dit unitaire lorsque son coefficient dominant (c'est à dire le coefficient de son terme de plus haut degré) est égal à 1.
L'objet du problème est l'étude des extrema d'une fonction de plusieurs variables (partie II).
A cet effet, on étudie auparavant, dans la partie I, une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ et leurs racines.
Les deux parties ne sont pas indépendantes, mais on pourra admettre des résultats de la partie I pour pouvoir traiter la partie II.

Partie I

1) Définition d'un endomorphisme ϕ de $\mathbb{R}_n[X]$

a) Etablir que l'application associant à tout polynôme P de $\mathbb{R}_n[X]$ le polynôme $\phi(P) = 2xP' - P$" (où P' et P'' désignent les dérivées première et seconde de P) est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Ecrire sa matrice dans la base canonique $(1, x, x^2, \ldots, x^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Eléments propres de l'endomorphisme ϕ

a) Déterminer les valeurs propres $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ de ϕ (on supposera que $\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$ et montrer que ϕ est diagonalisable.

b) Montrer, pour tout nombre entier p tel que $0 \leq p \leq n$, qu'il existe un et un seul polynôme unitaire H_p de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

$$H_p'' - 2xH_p' + 2pH_p = 0$$

c) Montrer, pour tout nombre entier p tel que $0 \leq p \leq n$, que H_p est nécessairement de degré p.

d) Expliciter les polynômes $H_0,\ H_1,\ H_2,\ H_3$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer les coefficients de x^{p-1} $(1 \leq p \leq n)$ et de x^{p-2} $(2 \leq p \leq n)$ dans l'expression du polynôme H_p.

3) Définition d'un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

a) Montrer que l'intégrale écrite ci-dessous est définie pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x)\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$$

b) Montrer alors que l'application $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \langle P, Q\rangle \in \mathbb{R}$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

c) Exprimer la dérivée de $x \mapsto P'(x).\exp(-x^2)$ en fonction de $\phi(P)(x).\exp(-x^2)$, puis prouver qu'on a pour tout couple (P, Q) de $\mathbb{R}_n[X]$:

$$\langle \phi(P), Q\rangle = \langle P, \phi(Q)\rangle$$

d) En déduire que $\langle H_p, H_q\rangle = 0$ lorsque p et q sont deux nombres entiers distincts compris entre 0 et n, puis que $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$ forme une base orthogonale pour ce produit scalaire. Montrer enfin que $\langle H_p, Q\rangle = 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $R_{p-1}[X]$ $(1 \leq p \leq n)$.

4) Etude des racines des polynômes H_p $\quad (1 \leq p \leq n)$

a) Montrer, en remarquant que $\langle H_p, H_0\rangle = 0$, que le polynôme H_p s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$ en changeant de signe.

b) On note $a_1, a_2, \ldots, a_m$ les racines distinctes de H_p en lesquelles celui-ci s'annule et change de signe (avec bien entendu $m \leq p$) et on pose alors $P_m(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_m)$. Etudier le signe du polynôme H_pP_m et déterminer la valeur de l'intégrale $\langle H_p, P_m\rangle$ si $m < p$, puis en déduire que $m = p$.

c) En déduire que le polynôme H_p admet p racines simples dans $\mathbb{R}$.

5) Relations entre les polynômes H_p $\quad (2 \leq p \leq n)$

a) Prouver les égalités suivantes pour tout polynôme Q appartenant à $R_{p-3}[X]$ où $3 \leq p \leq n$:

$$\langle xH_{p-1}, Q\rangle = 0 \qquad ; \qquad \langle H_p - xH_{p-1}, Q\rangle = 0$$

En exprimant le polynôme $H_p - xH_{p-1}$ dans la base $(H_0, H_1, \ldots, H_n)$, établir la relation :

$$2Hp - 2xH_{p-1} + (p-1)H_{p-2} = 0 \quad (\text{pour } 2 \leq p \leq n)$$

b) Prouver l'égalité $\langle H'_p, Q\rangle = 0$ pour tout polynôme Q appartenant à $R_{p-2}[X]$ où $2 \leq p \leq n$, puis en déduire la relation :

$$H'_p = pH_{p-1} \quad (\text{pour } 1 \leq p \leq n)$$

Partie II

On considère dans cette partie l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ constitué des n-uplets $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. On note U l'ouvert de $\mathbb{R}^n$ constitué des n-uplets $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ (mais on ne demande pas de vérifier que cette partie U de $\mathbb{R}^n$ est ouverte).
On étudie ici les extrema de la fonction de plusieurs variables F définie sur l'ouvert U par :

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(x_j - x_i)$$

Par exemple, pour $n = 3$, on obtient :
$F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\ln(x_2 - x_1) - 2\ln(x_3 - x_2) - 2\ln(x_3 - x_1)$.

1) Etude du cas particulier $n = 2$ $(F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2\ln(x_2 - x_1))$

a) Calculer les deux dérivées partielles de F en tout point $x = (x_1, x_2)$ de U et déterminer l'unique point a de U où ces dérivées partielles sont nulles.

b) Calculer $F(a)$ et montrer que F présente un minimum local en a.

2) Etude du point critique de F dans le cas général

On associe à tout point a de U le polynôme $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n)$. On rappelle qu'un point a de U est dit point critique de F si les dérivées partielles de F sont nulles en a.

a) Etablir la relation suivante pour tout nombre réel x distinct de $a_1, a2, \ldots, a_n$:

$$\frac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x - a_j}$$

En déduire la limite quand x tend vers a_i de $\dfrac{P'(x)}{P(x)} - \dfrac{1}{x - a_i}$.

b) Déterminer à l'aide de la formule de Taylor-Young (dont on demande de rappeler ici l'énoncé) le développement limité à l'ordre 2 à l'origine des deux fonctions suivantes :

$$f(t) = tP'(a_i + t) - P(a_i + t) \qquad ; \qquad g(t) = tP(a_i + t)$$

En déduire la limite quand x tend vers a_i de $\dfrac{P'(x)}{P(x)} - \dfrac{1}{x - a_i}$ (on posera $x = a_i + t$).

c) Utiliser les résultats précédents pour établir l'égalité :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{a_i - a_j} = \frac{P''(a_i)}{2P'(a_i)}$$

Exprimer les n dérivées partielles de F en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, puis démontrer que si a est point critique de F, alors $2xP' - P''$ admet pour racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

d) En déduire qu'il existe un nombre réel λ (dont on précisera la valeur) tel que $2xP' - P'' = \lambda P$, puis comparer les polynômes P et H_n. Etablir que F admet un unique point critique a dans U.

3) Nature du point critique de F dans le cas général

a) Montrer, si x, y appartiennent à U, que $tx + (1-t)y$ appartient aussi à U si $0 \leq t \leq 1$.

b) On dit qu'une fonction f définie sur l'ouvert U est convexe si :

$$\forall x, y \in U,\ \forall t \in [0,1],\ f\big(tx + (1-t)y\big) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

- Montrer que la fonction $x \in \mathbb{R} \to x^2 \in \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En déduire que $x \mapsto x_i^2$ est convexe sur U.
- Montrer que la fonction $x \in]0, +\infty[\to -\ln(x) \in \mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
En déduire que $x \mapsto -\ln(x_j - x_i)$ est convexe sur U.
- Etablir que F est convexe sur U.

c) On désigne par a le point critique de F et par x un élément de U et on pose pour $0 \leq t \leq 1$:

$$\psi(t) = F\big(tx + (1-t)a\big)$$

- Calculer la dérivée $\psi'(t)$ et montrer que $\psi'(0) = 0$.
- Etablir l'inégalité ci-dessous pour $0 < t \leq 1$, puis conclure que F admet un minimum en a :

$$\frac{\psi(t) - \psi(0)}{t} \leq F(x) - F(a)$$

4) Calcul du minimum $F(a)$ de F dans le cas général

a) On désigne par $y_1, \ldots, y_{n-1}$ les racines de H_{n-1}, et par $z_l, \ldots, z_{n-2}$ les racines de H_{n-2} $(n \geq 3)$.

- Etablir à l'aide de la relation $2H_n - 2xH_{n-1} + (n-1)H_{n-2} = 0$, les relations :

$$\left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i)\right| = \big(\frac{n-1}{2}\big)^{n-1}\left|\prod_{i=1}^{n-2} H_{n-1}(z_i)\right| \quad ; \quad \left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i)\right| = \frac{2^2 3^3 \ldots (n-1)^{n-1}}{2^{\frac{n(n-1)}{2}}}$$

- Etablir que $|H_n'(a_i)| = \left|\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} (a_j - a_i)\right|$ et évaluer $p_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$ en fonction de $\prod_{i=1}^{n} H_n'(a_i)$.
- Etablir à l'aide de la relation $H_n' = nH_{n-1}$ l'égalité $p_n^2 = n^n \left|\prod_{i=1}^{n-1} H_n(y_i)\right|$.
- En déduire p_n en fonction de n.

b) En remarquant que le polynôme H_n vérifie l'égalité suivante :

$$Hn(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) = x^n - \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x^{n-1} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j x^{n-2} - \cdots + (-1)^n a_1 a_2 \ldots a_n$$

calculer les sommes $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i$, $\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j$, puis $\sum_{1 \leq i \leq n} a_i^2$.

En déduire la valeur $F(a)$ du minimum de F sur U et retrouver lorsque $n = 2$ le résultat du **II.1**.