Code sujet : 282

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESSEC – HEC PARIS

MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

FILIÈRE ÉCONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE GENERALE

Jeudi 27 avril 2023, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Notations

Dans tout le texte, on adopte les notations suivantes :

- Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $[\![0;n]\!]$ l'ensemble des entiers k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n$.
- Si $x \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x.
- Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices à coefficients réels ayant n lignes et m colonnes. On pose $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ et on note I_n la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Les coefficients d'une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ sont notés $(A)_{i,j}$, $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant m$.
- La transposée d'une matrice A est notée ${}^tA$. Lorsque $A = [a] \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, où $a \in \mathbb{R}$, on identifie A au réel a. Si $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\|V\|$ sa norme euclidienne.
- Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet énoncé sont définies sur cet espace.
- Si X est une variable aléatoire réelle, on note $\mathbb{E}(X)$ son espérance, si elle existe. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on appelle moment d'ordre k de X, s'il existe, le réel $\mathbb{E}(X^k)$. On le note $m_k(X)$ et on convient que $m_0(X) = 1$
- Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de deux variables de classe C^2 et $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, on notera $\nabla g(x_1, x_2)$ et $\nabla^2 g(x_1, x_2)$, respectivement, le gradient et la matrice hessienne de g au point (x_1, x_2).

- $\forall \alpha \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction puissance α sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \begin{cases} x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}.$$

- Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et J un intervalle de $\mathbb{R}$. On note $f_{|J}$, la restriction de f à J :

$$f_{|J} : \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

L'énoncé comporte trois grandes parties I, II et III. Les parties II et III sont largement indépendantes.
Le mot **FIN** *marque la fin de l'énoncé.*

Partie I : questions préliminaires, problème des moments

Soit X une variable aléatoire réelle à densité.

1. Montrer que dans les cas suivants, la variable X admet des moments de tout ordre et déterminer ces moments :
   (a) X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$.
   (b) X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans toute la suite, on se donne une suite de réels $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ avec $u_0 = 1$ et un intervalle J de $\mathbb{R}$.

On considère le problème suivant appelé **problème des moments** et qu'on note $\mathscr{M}^*(J)$:

Trouver une variable aléatoire réelle X vérifiant les trois conditions suivantes :

- *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, X admet un moment d'ordre k et $m_k(X) = u_k$.*
- *X admet une densité f, avec $f_{|J}$ continue sur J.*
- *$\forall x \in \mathbb{R}\backslash J$, $f(x) = 0$.*

Si X est une solution de ce problème et f une densité de X vérifiant les points précédents, on dit que f est une densité de X adaptée à $\mathscr{M}^*(J)$.

Dans ce problème, on s'intéressera uniquement à deux cas :
- Le cas $J = \mathbb{R}_+$. Dans ce cas, $\mathscr{M}^*(J)$ est appelé le *problème de Stieltjes*.
- Le cas $J = [0, 1]$. Dans ce cas, $\mathscr{M}^*(J)$ est appelé le *problème de Hausdorff*.

Partie II : le problème de Stieltjes

II.1) Des conditions nécessaires d'existence

On suppose dans cette partie II.1 que le problème $\mathscr{M}^*(J)$ avec $J = \mathbb{R}_+$ admet une solution notée X. On note f une densité de X adaptée à $\mathscr{M}^*(J)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note H_n et G_n les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont :

$$\forall (i, j) \in [\![1; n]\!]^2, \qquad (H_n)_{i,j} = u_{i+j-2}, \qquad (G_n)_{i,j} = u_{i+j-1}$$

2. Ecrire explicitement H_3 et G_3 en fonction de u_0, u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $W = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$^tWH_nW = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i\alpha_j u_{i+j-2}, \tag{1}$$

puis que

$$^tWH_nW = \int_0^{+\infty} (P(x))^2 f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{2}$$

où P est la fonction polynomiale définie par

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x^{i-1} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les valeurs propres de H_n sont positives.
5. Montrer de même que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toutes les valeurs propres de G_n sont positives.
6. On suppose uniquement dans cette question que $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_2 = \dfrac{1}{3}$.

   Montrer que nécessairement $u_3 \geqslant \dfrac{2}{9}$.
7. On suppose dans cette question seulement qu'il existe un réel $\theta > 0$ tel que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\exp(t^\theta)\,\mathrm{d}t$ converge.

   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a

   $$t^n \exp(-t^\theta) \leqslant \left(\frac{n}{\theta}\right)^{\frac{n}{\theta}} \exp\left(-\frac{n}{\theta}\right).$$

   (b) En déduire que la série de terme général $(u_n)^{-\frac{\theta}{n}}$ diverge.
8. **Python**

   On se donne un entier naturel N. On pose : $N^* = 1 + \left\lfloor \dfrac{N}{2} \right\rfloor$.

   On voudrait vérifier numériquement que la condition suivante, portant sur les $N+1$ premiers termes $u_0, \cdots, u_N$, est vérifiée :

   $$\forall n \in [\![0; N^*]\!], \quad \text{toutes les valeurs propres de } H_n \text{ sont positives} \tag{CS_N}$$

   On rappelle que cette condition est nécessaire d'après la question 4 ci-dessus.

   La fonction `test_stieltjes()` ci-dessous est écrite en langage Python. Elle est incomplète. Elle a comme paramètre d'entrée un tableau unidimensionnel `U` (de type array) comportant une suite finie de nombres réels $u_0, \cdots, u_N$.
   Compléter les parties soulignées en pointillé afin que la fonction `test_stieltjes()` renvoie la valeur 1 si la condition (CS_N) est satisfaite et renvoie la valeur 0 sinon.
   On notera que la fonction `eigvalsh()` de la librairie `numpy.linalg` renvoie un tableau unidimensionnel contenant les valeurs propres d'une matrice symétrique donnée en paramètre.
   On reproduira sur la copie le programme après l'avoir complété (sans les commentaires).

```
import numpy as np
import numpy.linalg as al
def test_stieltjes(U):
    N = len(U) - 1 # indice du dernier terme de la suite finie U
    m = 1+ N // 2
    H = np.zeros((m, m))
    for n in range(1, m+1): # taille de la matrice H_n
      for i in range(_______, ________):
        H[i, n-1] = U[i+n-1]
        H[n-1, i] = ___________________________
      valp = al.eigvalsh(H)

      for k in range(0, _________):
        if (____________________):
            return ____
    return ____
```

II.2) Non unicité des solutions

On définit la fonction $g\ :\ [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \exp(-x^{1/4})\sin(x^{1/4}) \text{ pour tout } x \in [0,+\infty[.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les intégrales

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\sin(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\cos(t)\,dt$$

existent (on convient que $t^0 = 1$).

On note dans la suite

$$S_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\sin(t)\,dt, \quad T_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\cos(t)\,dt \quad \text{et} \quad V_n = \begin{bmatrix} S_n \\ T_n \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}),$$

10. Montrer que $S_0 = \dfrac{1}{2}$. On admet que $T_0 = S_0$.

11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\begin{aligned} S_{n+1} + T_{n+1} &= (n+1)T_n, &(3)\\ S_{n+1} - T_{n+1} &= (n+1)S_n. &(4)\end{aligned}$$

12. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$V_{n+1} = (n+1)MV_n, \quad \text{où } M = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

13. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$V_n = n!\,M^n V_0.$$

14. Calculer M^4 et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$S_{4n+3} = 0.$$

15. En utilisant le changement de variable $x = t^4$ dont on justifiera la validité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_0^{+\infty} x^n g(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{5}$$

16. Montrer qu'il existe deux fonctions g_1 et g_2 positives, distinctes, continues sur $\mathbb{R}_+$ et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$ les deux intégrales

$$\int_0^{+\infty} x^n g_1(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} x^n g_2(x)\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

existent et sont égales.

17. Que peut-on conclure par rapport au problème $\mathscr{M}^*(J)$ quand $J = [0, +\infty[$?

Partie III : le problème de Hausdorff

Dans toute cette partie, on suppose que $J = [0, 1]$.

III.1) Une condition nécessaire d'existence

On suppose dans ce paragraphe III.1 que le problème $\mathscr{M}^*(J)$ avec $J = [0, 1]$ admet une solution notée à nouveau X. On note f une densité de X adaptée à $\mathscr{M}^*(J)$.

18. Montrer que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
19. Plus généralement, montrer que pour tous $i \in \mathbb{N}$ et $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{i+k} > 0. \tag{7}$$

20. On suppose dans cette question seulement que $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et $u_2 = \frac{1}{3}$.

Montrer que $u_3 \in \left]\frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right[$.

21. Revenons au cas général. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, la série de terme général $\dfrac{u_n}{n^\alpha}$ $(n \geqslant 1)$ est convergente.
Cette affirmation reste-t-elle vraie quand $\alpha = 0$?

III.2) Un test en langage Python pour le problème de Hausdorff

Revenons à la condition (7) ci-dessus. Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![0; n]\!]$ on pose

$$\Delta_{n,j} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} u_{n+k-j}. \tag{8}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit que la condition (7) est vraie à l'ordre n si

$$\forall j \in [\![0; n]\!], \quad \Delta_{n,j} > 0. \tag{CH_n}$$

22. Exprimer $\Delta_{n,0}$ en fonction de u_n.
23. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $j \in [\![0; n]\!]$ on a

$$\Delta_{n+1,j+1} = \Delta_{n,j} - \Delta_{n+1,j} \tag{9}$$

24. **Python**

La fonction `test_hausdorff()` ci-dessous est écrite en langage Python. Elle est incomplète. Elle a comme paramètre d'entrée un tableau unidimensionnel `U` (de type array) comportant une suite finie de nombres réels $u_0, \cdots, u_N$. Ici N est calculé à partir de la taille de U en utilisant la fonction `len()` qui renvoie la taille du tableau.

Compléter les parties soulignées en pointillé afin que la fonction `test_hausdorff()` renvoie un couple comportant les deux éléments suivants :

→ un entier `info` tel que :

— `info = -1` si la condition (CH_n) est satisfaite pour tout $n \in [\![0; N]\!]$.

— `info` est égal au plus petit entier $n \in [\![0; N]\!]$ pour lequel CH_n n'est pas satisfaite sinon.

→ un tableau bidimensionnel `Delta` de taille $(N+1) \times (N+1)$ comportant les coefficients $\Delta_{n,j}$ pour $n \in [\![0; N]\!]$ et $j \in [\![0; N]\!]$ (on pose $\Delta_{n,j} = 0$ si $j > n$).

On reproduira sur la copie le programme après l'avoir complété (sans les commentaires).

```
import numpy as np
def test_hausdorff(U):
  N = len(U) - 1 # indice du dernier terme de la suite finie U
  Delta  = np.zeros((N+1, N+1))
  info = -1
  for k in range(____,________):
      Delta[k, 0] = U[__]
      if ((________________________) and (info == -1 )):
          info = k
      for j in range(______ , _________):
          Delta[k, j] = _____________________________________
          if ( (______________________) and (________________)):
              info = ______
  return (info, Delta)
```

25. **Python**

```
def test3():
  N = 10
  U = np.zeros(N+1)
  for k in range(0, N+1):
    U[k] = 1.0/(k+1) # correspond a une loi uniforme
  V=test_hausdorff(U)
  U[3] = 0.16
  W=test_hausdorff(U)
  return V,W
```

On tape dans la console

```
>>> V,W=test3()
```

Quelles seront les valeurs de $V[0]$ et $W[0]$ retournées ?

III.3) Unicité de solutions à densité de classe C^1.

On suppose dans ce paragraphe que X_1 et X_2 sont solutions du problème $\mathscr{M}^*(J)$ avec $J = [0,1]$. On note f_1 et f_2 des densités de X_1 et X_2 respectivement adaptées au problème $\mathscr{M}^*(J)$. On suppose les restrictions de f_1 et f_2 sur $[0,1]$ de classe C^1 sur $[0,1]$. On pose $h = f_2 - f_1$ et on considère la suite de fonctions polynomiales $(\widehat{h}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, définies par :

$$\widehat{h}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} h\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

26. Montrer qu'il existe une constante réelle $K \in \mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad |h(x) - h(y)| \leqslant K|x-y|.$$

27. Soient $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$ fixés tous les deux. Soit Y_n une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[\![0;n]\!]$. On pose

$$Z_n = \frac{Y_n}{n}.$$

   (a) Montrer que

$$|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leqslant K\,\mathbb{E}(|Z_n - x|).$$

   (b) En déduire que

$$|h(x) - \mathbb{E}(h(Z_n))| \leqslant K\sqrt{\mathbb{E}((Z_n - x)^2)}.$$

28. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$|h(x) - \widehat{h}_n(x)| \leqslant K\frac{\sqrt{x(1-x)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{K}{2\sqrt{n}}.$$

29. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$\int_0^1 \widehat{h}_n(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

30. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^1 h^2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{K}{2\sqrt{n}}\int_0^1 |h(x)|\,\mathrm{d}x.$$

31. En déduire que $f_1 = f_2$. Conclure.

III.4) Problème de Hausdorff tronqué

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit trois fonctions

$$R_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha_1,\alpha_2) & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 t^k \exp\left(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right)\mathrm{d}t \end{array} \qquad F_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha_1,\alpha_2) & \mapsto & \dfrac{R_k(\alpha_1,\alpha_2)}{R_0(\alpha_1,\alpha_2)} \end{array}.$$

$$G : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\alpha_1,\alpha_2) & \mapsto & \ln(R_0(\alpha_1,\alpha_2)) - u_1\alpha_1 - u_2\alpha_2 \end{array}$$

On admet que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction R_k est continue sur $\mathbb{R}^2$.

32. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall x \in [-1, 1], 0 \leqslant e^x - 1 - x \leqslant Cx^2.$$

33. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que R_k admet une dérivée partielle par rapport à sa première variable en tout point et que pour tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_1 R_k(\alpha_1, \alpha_2) = R_{k+1}(\alpha_1, \alpha_2) \ . \tag{10}$$

On admet que R_k admet une dérivée partielle par rapport à sa seconde variable en tout point et que pour tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\partial_2 R_k(\alpha_1, \alpha_2) = R_{k+2}(\alpha_1, \alpha_2) \ . \tag{11}$$

(b) Pour tout $i \in \{1, 2\}$, en déduire l'identité,

$$\partial_i F_k = F_{k+i} - F_k F_i. \tag{12}$$

(c) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2\}$ et pour tout $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\partial_i F_k(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{1}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} \int_0^1 \left(t^i - F_i(\alpha_1, \alpha_2)\right) \left(t^k - F_k(\alpha_1, \alpha_2)\right) \exp\left(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right) \mathrm{d}t \ .$$

34. Soit $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Exprimer $\nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2)$ en fonction des dérivées partielles des $F_k(\alpha_1, \alpha_2)$, $k \geqslant 0$.

(b) En déduire que pour tout $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $v \neq 0$ on a

$$^t v \nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2) v > 0.$$

(c) En déduire que les valeurs propres de la matrice $\nabla^2 G(\alpha_1, \alpha_2)$ sont strictement positives.

(d) Dans cette question, on suppose qu'il existe une variable aléatoire X solution de $\mathscr{M}^\star(J)$ et de densité f adaptée à $\mathscr{M}^\star(J)$ telle que

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{1}{R_0(\alpha_1, \alpha_2)} \exp\left(\alpha_1 t + \alpha_2 t^2\right) & \text{si } t \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que G admet alors un minimum (local) en (α_1, α_2).

FIN