EXERCICE 1

On munit $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ du produit scalaire canonique. On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 2 & -4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad V_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad V_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

O désigne la matrice colonne nulle d'ordre 3.
I désigne la matrice identité (matrice unité) d'ordre 3.
Lorsque λ est une valeur propre d'une matrice carrée C, on notera $E_C(\lambda)$ le sous-espace propre associé.

Soit l'application ϕ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie pour toute matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par $\phi(M) = BM - MA$.

1. (a) Montrer que les valeurs propres de A sont -3 et 6. Déterminer $E_A(-3)$ et $E_A(6)$.
   (b) Montrer que 0 est valeur propre de B et déterminer $E_B(0)$. Montrer que $E_B(0) \subset E_A(-3)$.
   (c) Montrer que 3 est valeur propre de B et déterminer $E_B(3)$. Montrer que $E_B(3) \subset E_A(-3)$.
   (d) Montrer que (V_1, V_2) est une base orthogonale de $E_A(-3)$ formée de vecteurs propres de B.
   En déduire une matrice colonne d' ordre 3 notée V_3 et de première coordonnée égale à 1 telle que (V_1, V_2, V_3) soit une base orthogonale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A.
   (e) Exprimer BV_3 en fonction de V_2 et V_3.
   En déduire que la matrice B est semblable à la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.
2. (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Soit H une matrice carrée d' ordre 3 élément de Kerϕ).
   Montrer que $(B + 3I)HV_1 = O$, $(B + 3I)HV_2 = O$ et $(B - 6I)HV_3 = O$.
   En déduire $HV_1 = O$, $HV_2 = O$ et $HV_3 = O$ et que ϕ est un isomorphisme de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soient a et b deux valeurs propres respectives de A et de B.
   Soit X un vecteur propre de A associé à a et Y un vecteur propre de B associé à b.
   Montrer que $Y\,{}^tX$ est non nulle et calculer $\phi(Y\,{}^tX)$. En déduire que $b - a$ est valeur propre de ϕ.
4. Soit λ une valeur propre de ϕ. Soit M une matrice carrée vecteur propre de ϕ associée à la valeur propre λ.
   (a) Montrer que :
   $(B - (\lambda - 3)I)MV_1 = O$, $(B - (\lambda - 3)I)MV_2 = O$ et $(B - (\lambda + 6)I)MV_3 = O$.
   (b) Montrer que :
   si $MV_1 \neq O$ alors $\lambda - 3$ est valeur propre de B.
   si $MV_2 \neq O$ alors $\lambda - 3$ est valeur propre de B.
   si $MV_3 \neq O$ alors $\lambda + 6$ est valeur propre de B.
   (c) En remarquant que $M \neq O$, montrer que MV_1, MV_2, MV_3 ne peuvent pas être tous nuls.
   En déduire que λ est la différence d' une valeur propre de B et d' une valeur propre de A.
   Donner finalement l' ensemble des valeurs propres de ϕ.

EXERCICE 2

Lorsque A et B sont deux événements d'un même espace probabilisé, on désignera par $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant B, où B est un événement de probabilité non nulle : $P_B(A) = P(A / B)$.

On considère un réel strictement positif α et la fonction f_α définie sur $\mathbb{R}$ par :

Pour tout $t \in \left]0;1\right]$, $f_\alpha(t) = \alpha\, t^{(\alpha-1)}$ et pour tout $t \in \left]-\infty;0\right] \cup \left]1;+\infty\right[$, $f_\alpha(t) = 0$.

1. (a) Montrer que f_α est une densité de probabilité. Soit X_α une variable aléatoire de densité f_α.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable X_α.
   (c) Montrer que pour tous réels a et b tels que $0 < a \leq b \leq 1$, $P_{X_\alpha \leq b}(X_\alpha \leq a) = P(X_\alpha \leq \frac{a}{b})$.

   (C' est-à-dire $P(X_\alpha \leq a \,/\, X_\alpha \leq b) = P(X_\alpha \leq \frac{a}{b})$).

2. *Ce paragraphe étudie une fonction H vérifiant la propriété **(R)** :*

   (R) : H est dérivable sur $\left]0;1\right]$ et pour tous réels x et y de $\left]0;1\right]$, $H(xy) = H(x)H(y)$.

   (a) Montrer que pour tout réel t de $\left]0;1\right]$, $\left(H(\sqrt{t})\right)^2 = H(t)$. En déduire le signe de H sur $\left]0;1\right]$.
   (b) On suppose ici qu' il existe un réel β de $\left]0;1\right]$ tel que $H(\beta) = 0$.

   Montrer grâce au 2(a) et par récurrence que pour tout entier naturel n, $H\left(\beta^{\left(\frac{1}{2^n}\right)}\right) = 0$.

   En déduire par continuité de H que $H(1) = 0$, puis, que H est nulle sur $\left]0;1\right]$.

   (c) On suppose ici que pour tout réel β de $\left]0;1\right]$, $H(\beta) \neq 0$.

   c1. Montrer que H est strictement positive sur $\left]0;1\right]$. Montrer que $H(1) = 1$.
   c2. Montrer que pour tous réels x et y de $\left]0;1\right]$, $yH'(xy) = H'(x)H(y)$.
   c3. On considère la fonction V dérivable sur $\left]0;1\right]$ définie par :
   Pour tout réel $t \in \left]0;1\right]$, $V(t) = \ln(H(t))$.
   Montrer que pour tout réel $t \in \left]0;1\right]$, $V'(t) = \dfrac{H'(1)}{t}$.
   c4. Montrer que pour tout réel $t \in \left]0;1\right]$, $V(t) = H'(1)\ln(t)$.
   En déduire que pour tout réel $t \in \left]0;1\right]$, $H(t) = t^{H'(1)}$.

3. *On suppose dans ce paragraphe que Y est une variable à densité vérifiant les propriétés suivantes :*

   - $Y(\Omega) = \left]0;1\right]$.
   - La fonction de répartition F_Y de Y est dérivable sur $\left]0;1\right]$.
   - Pour tous réels a et b tels que $0 < a \leq b \leq 1$, $P_{Y \leq b}(Y \leq a) = P(Y \leq \frac{a}{b})$.

   (a) Montrer que F_Y vérifie la propriété ***(R)***.
   (b) En déduire qu' il existe un réel strictement positif α tel que Y et X_α suivent la même loi.

EXERCICE 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} f(k) = 0 \quad si \quad k \quad est \quad pair\,(\,ceci\,comprend\;k = 0\,) \\ f(k) = 1 \quad si \quad k \quad est \quad impair \end{cases}$.

On considère un entier naturel non nul N, et on définit les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} N_0 = N \;;\; u_0 = f(N_0) \\ \text{Pour tout } k \in \mathbb{N}\;,\; N_{k+1} = \dfrac{N_k - u_k}{2} \quad \text{et} \quad u_{k+1} = f(N_{k+1}) \end{cases}$$

1. *Deux exemples.*

(a) Déterminer les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $N = 27$.

(b) Déterminer les suites $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ lorsque $N = 2^{10}$.

2. *Dans cette question on étudie les suites* $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *et* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *dans le cas général .*

(a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel k :
u_k existe et appartient à $\{0,1\}$ et N_k existe et appartient à $\mathbb{N}$.

(b) Montrer que pour tout entier naturel k, $N_{k+1} \leq \frac{1}{2} N_k$.

En déduire que la suite $(N_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de limite nulle.

Montrer qu' il existe un rang n_0 à partir duquel N_k est inférieur à $\frac{1}{2}$.

En déduire que pour tout entier naturel k supérieur ou égal à n_0 , $N_k = u_k = 0$.

(c) Montrer que pour tout entier naturel k, $2^{k+1}N_{k+1} - 2^k N_k = -2^k u_k$.

En déduire en sommant de $k = 0$ à n_0 que : $N = 2^0 u_0 + 2^1 u_1 + \cdots + 2^{n_0} u_{n_0}$.

(d) Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être la suite identiquement nulle.

Il existe donc un entier s inférieur à n_0 tel que $u_s = 1$ et pour tout k strictement supérieur à s , $u_k = 0$.

3. *Informatique.* On dispose de la fonction Turbo-Pascal définie de la manière suivante :

```
function  g ( n : integer ) : integer ;
begin
g : = n - 2 * int ( n / 2 ) ;
end;
```

où **int (x)** représente la fonction mathématique " partie entière de x ", aussi notée $[x]$.
(On rappelle que $[x]$ est l' unique entier tel que $[x] \leq x < [x] + 1$).

(a) En distinguant deux cas selon que n est pair ou impair , montrer que la fonction g n' est autre que la fonction f .

(b) Soit d l' entier égal à la partie entière de $\dfrac{\ln(N)}{\ln(2)}$.

Montrer que d est l' unique entier tel que $2^d \leq N < 2^{d+1}$.
En déduire que l' entier s évoqué dans le 2.(d) est égal à d .

(c) Ecrire finalement un programme utilisant la fonction **g** qui demande un entier naturel non nul N , calcule d et affiche successivement les valeurs $u_0 , u_1 , \cdots , u_d$.