

## EXERCICE 1

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par : Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t) = \frac{2}{\pi(e^t + e^{-t})}$ .

1. (a) Soit la fonction  $g$  définie sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  par : Pour tout  $\theta \in ]0; \frac{\pi}{2}[$ ,  $g(\theta) = \ln(\tan \theta)$ .

Montrer que  $g$  est de classe  $C^1$  sur  $]0; \frac{\pi}{2}[$  et calculer sa dérivée.

- (b) En déduire grâce au changement de variable  $t = g(\theta)$  que  $f$  est une densité de probabilité.  
On note dans toute la suite  $X$  une variable aléatoire admettant une densité égale à  $f$ .
- (c) Montrer que  $f$  est paire, puis que  $X$  admet une espérance et que celle-ci est nulle.

2. Ce paragraphe établit des préliminaires au calcul de la variance de  $X$ . Soit  $p$  un entier naturel non nul.

- (a) Soit  $Y$  une variable aléatoire réelle suivant une loi exponentielle de paramètre  $p$ .  
Donner l'espérance et la variance de  $Y$ . En déduire l'espérance  $E(Y^2)$ .

- (b) On note  $J_p = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-pt} dt$ . Déduire du (a) la convergence et la valeur de  $J_p$  en fonction de  $p$ .

- (c) Montrer que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-pt}}{1 + e^{-2t}} dt$  converge et que  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-pt}}{1 + e^{-2t}} dt = 0$ .

3. On exprime dans ce paragraphe la variance de  $X$  à l'aide d'une série.

- (a) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Montrer que pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ ,  $\frac{1}{1 + e^{-2t}} = (-1)^{n+1} \frac{e^{-2(n+1)t}}{1 + e^{-2t}} + \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-2kt}$ .

- (b) En déduire que pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \mathbb{R}^+$  :  $f(t) = \frac{2}{\pi} \left[ (-1)^{n+1} \frac{e^{-(2n+3)t}}{1 + e^{-2t}} + \sum_{k=0}^n (-1)^k e^{-(2k+1)t} \right]$ .

- (c) Montrer finalement que  $X$  admet une variance et que  $V(X) = \frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$ .

4. Soient  $U$  et  $V$  deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé et suivant une loi normale centrée réduite  $N(0; 1)$ . On note  $h$  une densité de  $U$  et de  $V$ .

- (a) Montrer que la variable aléatoire  $A = \ln(|U|)$  est une variable aléatoire à densité admettant une densité  $f_A$  telle que pour tout réel  $x$ ,  $f_A(x) = 2e^x h(e^x)$ .

- (b) Montrer que la variable aléatoire  $B = -\ln(|V|)$  est une variable aléatoire à densité admettant une densité  $f_B$  telle que pour tout réel  $x$ ,  $f_B(x) = f_A(-x)$ .

- (c) Soit  $C$  la variable aléatoire à densité  $C = A + B = \ln\left(\left|\frac{U}{V}\right|\right)$ .

Calculer pour tout réel strictement positif  $y$  l'intégrale  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{u} f_B(-\ln u) f_A(\ln(uy)) du$ .

En effectuant dans cette intégrale le changement de variable  $u = e^{-t}$  en déduire une densité de  $C$ .  
Vérifier que  $C$  suit la même loi que  $X$ .

## EXERCICE 2

Dans cet exercice,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  muni de son produit scalaire canonique noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et de norme associée notée  $\| \cdot \|$ .

On note  $\mathcal{B}$  la base canonique  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $\mathbb{R}^n$ , qui est orthonormée pour ce produit scalaire.

On considère l'endomorphisme  $f$  de  $E$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $f(e_i) = e_1 + e_2 + \dots + e_n$ .

On note  $I$  la matrice carrée unité d'ordre  $n$ .

Etant donnés  $n$  réels  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , on note  $m = \min(a_1, a_2, \dots, a_n)$  et on suppose que  $m > 0$ .

On note  $d$  l'endomorphisme de  $E$  tel que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $d(e_i) = a_i e_i$ .

On note enfin  $g$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $g = f + d$ .

1. (a) Montrer que le vecteur  $w = e_1 + e_2 + \dots + e_n$  est un vecteur propre de  $f$ .  
A quelle valeur propre est-il associé ?
- (b) Déterminer  $\text{Im}(f)$  et en préciser une base orthonormée.
- (c) Prouver que  $\text{Ker}(f)$  est le sous-espace vectoriel de  $E$  de base  $\mathcal{B}' = (e_2 - e_1, e_3 - e_1, \dots, e_n - e_1)$ .
- (d) Justifier que  $\text{Im}(f) = (\text{Ker}(f))^\perp$  (orthogonal de  $\text{Ker}(f)$  pour le produit scalaire canonique).
- (e) En déduire qu'il existe une base orthonormée de  $E$  formée de vecteurs propres de  $f$ , et que pour tout vecteur  $u$  de  $E$ ,  $\|f(u)\| \leq n \|u\|$ .
2. (a) Justifier que  $d$  est un automorphisme de  $E$ .
- (b) Montrer que pour tout  $u$  de  $E$ ,  $\|d(u)\| \geq m \|u\|$ , et que pour tout  $v$  de  $E$ ,  $\|d^{-1}(v)\| \leq \frac{1}{m} \|v\|$ .
- (c) Prouver que pour tout vecteur non nul  $u$  de  $E$ ,  $\|f(u)\| < \|d(u)\|$ .
- (d) En déduire en étudiant  $\text{Ker}(g)$  que l'endomorphisme  $g$  est un automorphisme de  $E$ .
3. Soit un vecteur  $v$  fixé de  $E$ . Il existe d'après le 2.(d). un unique vecteur  $u$  de  $E$  tel que  $g(u) = v$ .

On considère alors la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de vecteurs de  $E$  définie par :

$$\begin{cases} u_0 = v \\ \forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = d^{-1}(v) - (d^{-1} \circ f)(u_k) \end{cases}$$

- (a) Vérifier que  $u = d^{-1}(v) - (d^{-1} \circ f)(u)$ .
- (b) Montrer que pour tout entier naturel  $k$  :  $u_{k+1} - u = -(d^{-1} \circ f)(u_k - u)$ .
- (c) En déduire que pour tout entier naturel  $k$  :  $\|u_{k+1} - u\| \leq \frac{n}{m} \|u_k - u\|$ .

Montrer enfin que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \|u_k - u\| = 0$ .

### EXERCICE 3

Dans cet exercice  $n$  désigne un entier naturel non nul.

On dispose de deux jeux **identiques** de  $n$  cartes chacun, dont les dos sont indiscernables.

Chacun de ces jeux est composé de  $n$  figurines représentant des animaux différents.

#### Partie A

On choisit au hasard et simultanément une carte dans chaque jeu, formant ainsi une paire de cartes, mise de côté. On recommence  $n$  fois ce tirage sans remise. On dispose alors de  $n$  paires de cartes.

1. Quelle est la probabilité que les  $n$  paires d'animaux soient reconstituées ?
2. Soit  $k$  un entier naturel de  $\{0, \dots, n-1\}$  et  $k$  paires d'animaux fixées arbitrairement. Quelle est la probabilité qu'au moins ces  $k$  paires d'animaux soient reconstituées ?
3. Montrer grâce à la formule du crible que la probabilité  $p_n$  qu'aucune paire d'animaux ne soit reconstituée

est égale à  $p_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$ . Déterminer la limite de la suite  $(p_n)_{n \geq 1}$ .

#### Partie B

On mélange maintenant les deux jeux dans une urne.

A chaque tour on tire une poignée de deux cartes. Si les animaux représentés sur ces deux cartes sont les mêmes, on ne remet pas les deux cartes dans l'urne, sinon on les remet dans l'urne.

Soit  $T_n$  la variable aléatoire égale au nombre de tours qui ont été nécessaires pour vider l'urne, en reconstituant ainsi les  $n$  paires de figurines d'animaux.

1. Déterminer la loi et l'espérance de la variable  $T_1$ .
2. Déterminer  $T_n(\Omega)$  pour  $n$  supérieur ou égal à 2.
3. (a) En utilisant les événements  $C_i$  : " lors du  $i$ -ième tour, une paire d'animaux est reconstituée ", montrer que pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2 :

$$P(T_2 = k) = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}.$$

- (b) Montrer que  $T_2$  admet une espérance et la calculer.
4. (a) Déterminer les probabilités  $P(T_3 = 3)$ ,  $P(T_3 = 4)$ .  
En utilisant le système complet d'événements  $(C_1, \bar{C}_1)$ , déterminer  $P(T_3 = 5)$ .
- (b) Montrer plus généralement que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2 et pour  $k \geq n-1$  :

$$P(T_n = k+1) = \frac{n}{C_{2n}^2} P(T_{n-1} = k) + \frac{C_{2n}^2 - n}{C_{2n}^2} P(T_n = k).$$

- (c) On admet dans cette question que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $T_n$  admet une espérance.

Montrer en multipliant l'égalité précédente par  $k$  et en sommant de  $k = n-1$  à  $+\infty$  que pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 2,  $E(T_n) = E(T_{n-1}) + 2n - 1$ .

En déduire pour tout entier naturel non nul  $n$  une expression de  $E(T_n)$  en fonction de  $n$ .