ESC 2002. math. Option scientifique.

EXERCICE 1

On rappelle que lorsque Y est une variable aléatoire admettant une espérance $E(Y)$ et un écart-type non nul σ_Y, on note $Y^\star$ la variable centrée réduite associée à Y, définie par $Y^\star = \dfrac{Y - E(Y)}{\sigma_Y}$.
Soit n un entier naturel non nul.
On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$, suivant la même loi, et admettant une espérance notée m et un écart-type strictement positif noté σ.
On pose également $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
Enfin on note Φ la fonction de répartition d'une variable suivant la loi normale centrée réduite.

1)a) Montrer que S_n admet une espérance et une variance et les exprimer en fonction de n , m et σ.

b) En déduire l'expression de $S_n^\star$ en fonction de S_n.

Dans la suite de l'exercice, on pose pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel β :

$$p_{n,\beta} = P(|S_n^\star| < n^\beta)$$

On cherche à étudier la limite de la suite $(p_{n,\beta})_{n\in\mathbb{N}^*}$ dans différents cas de figure.

2) On suppose $\beta = 0$.

a) Montrer grace au théorème de la limite centrée que $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{n,0} = \Phi(1) - \Phi(-1)$.

b) Donner une valeur approchée de cette limite (On donne $\Phi(1) \simeq 0.8413$).

3) On suppose $\beta > 0$.

a) Montrer que $p_{n,\beta} = P\left(|S_n - nm| < \sigma.n^{\beta+\frac{1}{2}}\right)$.

b) Montrer en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que $p_{n,\beta} \geq 1 - \frac{1}{n^{2\beta}}$.

c) En déduire la limite de la suite $(p_{n,\beta})_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4) On suppose ici que $\beta < 0$, et que $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivent la loi normale centrée réduite.

a) Quelle est la loi de la variable S_n ? de la variable $S_n^\star$?

b) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n,\beta} = 2\big(\Phi(n^\beta) - \Phi(0)\big)$.

c) Montrer en utilisant la continuité de Φ en 0 que : $\lim\limits_{n\to+\infty} p_{n,\beta} = 0$.

d) Montrer en utilisant la dérivabilité de Φ en 0, que : $p_{n,\beta} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{2}{\pi}}.n^\beta$.

EXERCICE 2

Soit E l'ensemble des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels telles que la série de terme général a_n^2 converge.
Dans cet énoncé on emploie la notation a pour désigner une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels.

1)a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout réel non nul α, on considère la suite $u(\alpha)$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n(\alpha) = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}$$

Vérifier que les suites $u(\alpha)$ sont des éléments de E.

2)a) Montrer que si a et b sont éléments de E, alors la série de terme général $a_n b_n$ est absolument convergente.

b) Soit Φ l'application définie sur $E \times E$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall (a,b) \in E \times E, \quad \Phi((a,b)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$$

Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.
On notera alors $\langle a, b\rangle = \Phi(a,b)$, et $\|.\|_2$ la norme associée à Φ.

c) Montrer que pour toutes suites a et b de E, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2}$.

d) Déterminer pour tout réel α la norme $\|u(\alpha)\|_2$, et pour tous réels α et β distincts, le produit scalaire $\langle u(\alpha), u(\beta)\rangle$.

e) Déterminer une base orthogonale du sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $\big(u(-1), u(1), u(2)\big)$.

3) Pour tout entier naturel k non nul, on définit :
F_k l'ensemble des suites réelles a telles que : pour tout entier $n \geq k$, $a_n = 0$
G_k l'ensemble des suites réelles a de E telles que : pour tout entier $n \leq k-1$, $a_n = 0$.

a) Montrer que $F_k \subset E$, et que F_k est un sous-espace vectoriel de E.

b) Déterminer une base de F_k et donner la dimension de F_k.

c) Montrer que G_k est un sous-espace vectoriel de E.

d) Soit a une suite de E. Montrer qu'il existe deux suites r et s telles que :

$$r \in F_k,\ s \in G_k \text{ et pour tout entier naturel } n,\ a_n = r_n + s_n$$

En déduire que F_k et G_k sont des espaces supplémentaires orthogonaux pour le produit scalaire Φ.

e) Montrer que la suite $\left(\frac{1}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de E.
Déterminer son projeté orthogonal sur F_k pour le produit scalaire Φ.

EXERCICE 3

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(t) = t\mathrm{e}^{-t}$ pour tout réel t positif.

1)a) Etudier la fonction g sur $\mathbb{R}_+$.

b) Montrer que pour tout réel strictement positif t, $g(t) \leq \dfrac{4}{t\mathrm{e}^2}$.

2) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, l'équation $g(t) = \dfrac{1}{n}$ admet exactement deux solutions notées ρ_n et ρ'_n et telles que : $0 < \rho_n < 1 < \rho'_n$.

3)a) Montrer que la suite $(\rho_n)_{n\geq 3}$ converge et que sa limite est 0.

b) Montrer que $\rho_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

c) Montrer que la suite $(\rho'_n)_{n\geq 3}$ diverge.

Partie 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f((x,y)) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+4y^2}}}{x^2+4y^2} \quad \text{si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et} \quad f(0,0) = 0.$$

1)a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

b) Montrer en utilisant la question 1.b de la partie 1 que f est continue en $(0,0)$.

c) Déterminer les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

d) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

2) Montrer que (x,y) est un point critique pour f (c'est-à-dire susceptible d'être un extremum pour f) si et seulement si : $x^2 + 4y^2 = 1$ ou $(x,y) = (0,0)$.

3) En utilisant la fonction g étudiée dans la première partie

a) Trouver le minimum global de f ainsi que l'ensemble P des points le réalisant.

b) Trouver le maximum global de f ainsi que l'ensemble E des points le réalisant.

4) On note pour tout entier n supérieur ou égal à 3 : E_n l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f\big((x, y)\big) = \dfrac{1}{n}$.

On note également D la demi-droite de $\mathbb{R}^2$ définie par : $D = \left\{(x, y)/x \geq 0 \quad \text{et} \quad y = \dfrac{1}{2}x\right\}$.

Montrer que $E_n \cap D = \left\{\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{\rho_n}}, \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{\rho_n}}\right), \left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2}{\rho'_n}}, \dfrac{1}{4}\sqrt{\dfrac{2}{\rho'_n}}\right)\right\}$ où ρ_n et ρ'_n sont les valeurs définies dans la question 2 de la partie 1.