Code épreuve : 296

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Concepteur : EMLYON Business School

1ère épreuve (option économique)

MATHÉMATIQUES

Lundi 30 avril 2012 de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

On considère les matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Partie I : Étude de la matrice B

1. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B.
Est-ce que B est diagonalisable ?

2. Déterminer une matrice diagonale D de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$, dont les coefficients de la première ligne sont tous égaux à 1, telles que $B = PDP^{-1}$.

3. Vérifier que $D^2 = 5D - 4I$ et exprimer B^2 comme combinaison linéaire de B et I.

4. Montrer que B est inversible et exprimer B^{-1} comme combinaison linéaire de B et I.

Partie II : Étude d'un endomorphisme de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$

On considère l'application $h : \mathbf{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{M}_2(\mathbb{R}),\ \ M \longmapsto h(M) = AMB.$

1. Vérifier que h est un endomorphisme de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Montrer que h est bijectif et exprimer h^{-1} sous une forme analogue à celle donnée pour h.

3. On se propose dans cette question de déterminer les valeurs propres de h.

a. Soient $\lambda \in \mathbb{R},\ M \in \mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.
On note $N = MP$, où P est la matrice définie dans la question **I 2.**
Montrer : $h(M) = \lambda M \iff AND = \lambda N$, où D est la matrice définie dans la question **I 2.**

b. Déterminer les réels λ pour lesquels il existe une matrice N de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle telle que $AND = \lambda N$. À cet effet, on pourra noter $N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$.

c. En déduire les valeurs propres de h. Montrer que h est diagonalisable et donner une matrice diagonale représentant h.

d. On note e l'endomorphisme identité de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ et on note 0 l'endomorphisme nul de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$.
Montrer : $(h-e)\circ(h+e)\circ(h-4e)\circ(h+4e) = 0.$

EXERCICE 2

Partie I : Étude d'une fonction d'une variable réelle

On considère l'application $f : [0\,;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t\ln t & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $[0\,;+\infty[$.

2. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $f'(t)$ pour tout $t \in]0\,;+\infty[$.

3. Dresser le tableau des variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.

4. Montrer que f est convexe sur $]0\,;+\infty[$.

5. On note Γ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{i}, \vec{j})$.

a. Montrer que Γ admet une demi-tangente en O et préciser celle-ci.

b. Déterminer les points d'intersection de Γ et de l'axe des abscisses.

c. Préciser la nature de la branche infinie de Γ.

d. Tracer l'allure de Γ. On admet : $0,36 \leqslant e^{-1} < 0,37$.

Partie II : Étude d'une fonction de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0\,;+\infty[^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^2, définie, pour tout $(x,y) \in]0\,;+\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = \frac{\ln x}{y} + \frac{\ln y}{x}.$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0\,;+\infty[^2$.

2. Montrer que (e, e) est un point critique de F.

3. Calculer les dérivées partielles secondes de F en tout (x,y) de $]0\,;+\infty[^2$.

4. Est-ce que F admet un extrémum local en (e, e) ?

EXERCICE 3

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout entier n tel que $n \geqslant 0$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^n \,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}x$ est convergente.

2. a. Rappeler une densité d'une variable aléatoire qui suit la loi normale d'espérance nulle et de variance a^2.

En déduire : $I_0 = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

b. Calculer la dérivée de l'application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}$.

En déduire : $I_1 = a^2$.

3. a. Montrer, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$ et pour tout $t \in [0\,;+\infty[$:

$$\int_0^t x^n \,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}x = -a^2\,t^{n-1}\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2a^2}} + (n-1)\,a^2 \int_0^t x^{n-2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}}\,\mathrm{d}x.$$

b. En déduire, pour tout entier n tel que $n \geqslant 2$: $I_n = (n-1)a^2 I_{n-2}$.

c. Calculer I_2 et I_3.

On considère l'application $g_a\ :\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$g_a(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{a^2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2a^2}} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

4. Montrer que g_a est une densité.

On considère une variable aléatoire X admettant g_a comme densité.

5. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

6. Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance $\mathrm{E}(X)$ et que $\mathrm{E}(X) = a\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

7. Montrer que la variable aléatoire X admet une variance $\mathrm{V}(X)$ et calculer $\mathrm{V}(X)$.

8. a. On considère une variable aléatoire U suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0\,;1]$. Montrer que la variable aléatoire $Z = a\sqrt{-2\ln(U)}$ suit la même loi que la variable aléatoire X.

b. En déduire un programme en langage Pascal, utilisant le générateur aléatoire Pascal, simulant la variable aléatoire X, le réel a strictement positif étant entré par l'utilisateur.

Soit un entier n tel que $n \geqslant 2$.
On dit que n variables aléatoires à densité $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes si, pour tout n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de réels, les événements $(X_1 \leqslant x_1), (X_2 \leqslant x_2), \ldots, (X_n \leqslant x_n)$ sont mutuellement indépendants.
On admet que si n variables aléatoires à densité $X_1, X_2, \ldots, X_n$ admettent une espérance, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ admet une espérance qui est égale à la somme des espérances.
On admet que si n variables aléatoires à densité $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont indépendantes et admettent une variance, alors la variable aléatoire $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance qui est égale à la somme des variances.

On considère n variables aléatoires indépendantes $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant toutes la même loi que la variable aléatoire X.

9. On considère la variable aléatoire $A_n = \dfrac{\sqrt{2}}{n\sqrt{\pi}}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$.

a. Montrer que la variable aléatoire A_n est un estimateur sans biais de a.

b. Déterminer le risque quadratique de l'estimateur A_n.

On définit la variable aléatoire $M_n = \mathrm{Min}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R},\ \ (M_n > t) = (X_1 > t) \cap (X_2 > t) \cap \cdots \cap (X_n > t)$.

10. a. Montrer, pour tout $t \in [0\,;+\infty[$: $\ \mathrm{P}(M_n > t) = \mathrm{e}^{-\frac{nt^2}{2a^2}}$.

b. En déduire la fonction de répartition de M_n.

c. Montrer que M_n est une variable aléatoire à densité, admettant g_b comme densité avec $b = \dfrac{a}{\sqrt{n}}$.

d. Montrer que la variable aléatoire M_n admet une espérance $\mathrm{E}(M_n)$ et une variance $\mathrm{V}(M_n)$. Calculer $\mathrm{E}(M_n)$ et $\mathrm{V}(M_n)$.

11. a. En déduire un estimateur B_n sans biais de a, de la forme $\lambda_n M_n$ avec $\lambda_n \in \mathbb{R}$.

b. Déterminer le risque quadratique de l'estimateur B_n.