ECRICOME
VISER PLUS HAUT

CONCOURS D'ADMISSION 2014

1

Mathématiques

Option Scientifique

Mercredi 16 avril 2014 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

Aucun document n'est autorisé.
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 7 pages.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telles qu'il existe deux polynômes P, Q appartenant à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = xP(x) + x\ln(x)\,Q(x).$$

Pour tout entier $k \in \{1, .., n\}$, on pose :

$$u_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array} \right. \quad \text{et} \quad v_k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \ln(x) \end{array} \right. .$$

Pour toute fonction f appartenant à E, on note $\varphi(f)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(f)(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt$$

et on note φ l'application qui à $f \in E$ associe $\varphi(f)$.

1. Prouver que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $E = \mathrm{Vect}(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ (*c'est-à-dire que E est l'espace vectoriel engendré par les fonctions $u_1, v_1, \dots, u_n, v_n$*).

> On admettra que la famille $\mathcal{B} = (u_1, v_1, .., u_n, v_n)$ est une base de E.

2. Justifier que chaque fonction f de E se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $k \in \{1, .., n\}$, calculer $\varphi(u_k)$ et $\varphi(v_k)$.

3. Démontrer que φ est linéaire. En déduire que $\varphi(f) \in E$ lorsque $f \in E$.

4. Ecrire la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$.

5. L'endomorphisme φ est-il bijectif ? Quelles sont ses valeurs propres ?

6. Soit $f \in E$ un vecteur propre de φ associé à la valeur propre λ. On suppose que λ est non nul et on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = x^{-1/\lambda}\int_0^x f(t)\,dt.$$

Montrer que g est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire l'expression de la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ puis celle de f.

7. Pour chaque valeur propre λ de φ, déterminer la dimension de l'espace propre de φ associé à la valeur propre λ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

EXERCICE 2

On rappelle que la fonction Γ d'Euler est définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$\forall x > 0, \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

On admettra que Γ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]0,+\infty[, \quad \Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t}t^{x-1}dt.$$

On pose pour tout $x \in]0,+\infty[$:

$$L(x) = \ln(\Gamma(x)) \quad \text{et} \quad \Psi(x) = L'(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}.$$

1. Justifier que, pour tout $x > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln(t))^k e^{-t}t^{x-1}dt$ est convergente.
2. Exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de x et de $\Gamma(x)$. En déduire que :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \Psi(x+1) - \Psi(x) = \frac{1}{x}$$
puis préciser la valeur de $\Psi(n+2) - \Psi(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. A l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que :
$$\forall (x,A) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad \left(\int_0^A \ln(t)\, e^{-t}t^{x-1}dt\right)^2 \leqslant \left(\int_0^A (\ln(t))^2 e^{-t}t^{x-1}dt\right)\left(\int_0^A e^{-t}t^{x-1}dt\right).$$
4. Démontrer que :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad (\Gamma'(x))^2 \leqslant \Gamma(x)\Gamma''(x)$$
puis justifier que la fonction Ψ est croissante sur $]0,+\infty[$.

5. Soit $a \in]0,1[$.

   (a) Prouver que pour tout $n \geqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\Psi(1+a) - \Psi(1-a)\right) - \frac{1}{2a}\left(\Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a)\right)$$

   et :

$$0 \leqslant \Psi(n+1+a) - \Psi(n+1-a) \leqslant \Psi(n+2) - \Psi(n).$$

   (b) Etablir que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2 - a^2}$ est convergente et calculer sa somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - a^2}$ en fonction de Ψ et de a.

PROBLEME

Soient p un réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ et N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On pose $q = 1 - p$.

On considère un tournoi réunissant une infinité de joueurs $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ qui s'affrontent dans une série de duels de la façon suivante :

- A_0 et A_1 s'affrontent durant le duel numéro 1. Le perdant est éliminé du tournoi, le gagnant reste en jeu ;
- Le gagnant du premier duel participe au duel numéro 2 durant lequel il affronte le joueur A_2. Ce duel se déroule de manière analogue, et ne dépend du duel précédent que par l'identité du joueur affrontant A_2. Le perdant est éliminé du tournoi, et le gagnant du jeu participe au duel numéro 3 contre le joueur A_3 et ainsi de suite ;
- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, le joueur A_k participe au duel numéro k, qu'il peut remporter avec une probabilité p, son adversaire durant ce duel pouvant remporter le duel avec la probabilité $q = 1 - p$.
- Est désigné gagnant du tournoi, le premier joueur, s'il y en a un, qui gagne N jeux successifs lors du tournoï.

Pour tout entier naturel n, on considère l'événement E_n : « le gagnant du tournoi n'a pas encore été désigné à l'issue du duel numéro n ».

PARTIE I : Etude d'un cas particulier.

On suppose dans cette partie que $N = 3$ et $p = q = \frac{1}{2}$.

1. Simulation des duels. Rappelons que la commande **random** crée aléatoirement un réel appartenant à l'intervalle $[0, 1]$ (*qui suit en outre la loi uniforme sur* $[0, 1]$).

   (a) Ecrire une fonction DUEL en Turbo-Pascal qui créé un nombre aléatoire et renvoie 1 si ce nombre aléatoire est strictement inférieur à $\frac{1}{2}$ et 0 sinon.

   (b) Ecrire une fonction TEST_VICTOIRE en Turbo-Pascal qui, à trois nombres a, b, c fournis par l'utilisateur, renvoie TRUE si les trois sont égaux, FALSE sinon.

   (c) Ecrire un programme TOURNOI en Turbo-Pascal simulant un tournoi et renvoyant le nombre de duels nécessaires pour que le tournoi dispose d'un vainqueur (c'est-à-dire un candidat ayant remporté 3 victoires consécutives). **Indication** : *Si on souhaite, on pourra utiliser les fonctions DUEL et TEST_ VICTOIRE en les répétant convenablement jusqu'à ce que TEST_ VICTOIRE sur trois DUEL consécutifs renvoie TRUE.*

2. Créer la liste des gagnants possibles pour chacun des trois premiers duels sous la forme d'un tableau de la forme suivante :

   numéro du joueur gagnant le duel ↓

duel 1	0	...
duel 2	0	...
duel 3	0	...

   Déterminer les probabilités $P(E_1)$, $P(E_2)$ et $P(E_3)$. Vérifier que :

$$P(E_3) = \frac{1}{2}P(E_2) + \frac{1}{4}P(E_1).$$

3. En considérant le nombre de victoires déjà obtenues par le vainqueur du duel numéro n, démontrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 3$, on a :

$$(\mathcal{R}_1) : P(E_n) = \frac{1}{2}P(E_{n-1}) + \frac{1}{4}P(E_{n-2}).$$

4. Justifier l'existence de quatre réels λ, μ, r_1, r_2 tels que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad P(E_n) = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$

Le calcul explicite de λ et μ n'est pas demandé. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P(E_n)$.

5. Que vaut la probabilité $P\left(\bigcap\limits_{n=2}^{+\infty} E_n\right)$? Quelle est la probabilité de l'événement « le tournoi désignera un vainqueur » ?

PARTIE II : Etude du cas général.

On revient au cas général : p désigne un réel quelconque de $]0,1[$ et N est un entier supérieur ou égal à 3. On considère le polynôme Q défini par :

$$Q(X) = \left(\sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1}X^k\right) - 1.$$

1. Pour tout entier $k \in \{1, .., N-1\}$, on note $A_k^{(n)}$ l'événement : « à l'issue du n-ième duel, le vainqueur du n-ième duel a obtenu exactement k victoires ».

   Justifier l'égalité :

$$\forall n \geqslant N, \quad P_{A_k^{(n)}}(E_n) = P(E_{n-k}).$$

2. Etablir que pour tout $n \geqslant N$, on a :

$$(\mathcal{R}_2) : P(E_n) = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} P(E_{n-k}).$$

3. Calculer $P(E_1), .., P(E_{N-1})$. En déduire que :

$$P(E_N) = 1 - q^{N-1}.$$

4. Soit $n \geqslant N$. Démontrer la relation :

$$(\mathcal{R}_3) : P(E_n) - P(E_{n+1}) = pq^{N-1}P(E_{n-N+1}).$$

5. Prouver que l'équation $Q(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

   On note désormais r_N cette solution. Justifier que :

$$r_N > 1 \quad \text{et} \quad Q'(r_N) > 0.$$

6. A l'aide de la relation $(\mathcal{R}_2)$ (*question* **II**.2), établir que :

$$\forall n \geqslant 1, \quad P(E_n) \leqslant \left(\frac{1}{r_N}\right)^{n-N}.$$

7. Etablir la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} P(E_n)$ puis, en sommant la relation $(\mathcal{R}_3)$ (*question* **II**.4) sur tous les entiers $n \geqslant N$, donner la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$.

8. On définit X la variable aléatoire égale au nombre de duels qui ont eu lieu au moment de la proclamation du vainqueur du tournoi. On conviendra que $X = 0$ si le tournoi n'a pas de vainqueur.
   (a) Soit $n \geqslant 2$. Justifier que les événements $\left(E_{n-1} \cap \overline{E_n}\right)$ et $(X = n)$ sont égaux.
   (b) Démontrer que X admet une espérance et exprimer $E(X)$ en fonction de $\sum_{n=1}^{+\infty} P(E_n)$. En déduire la valeur de $E(X)$.

PARTIE III : Calcul de $P(E_n)$.

Les hypothèses et définitions introduites à la partie **II** sont conservées. Les résultats de la question **II.5**) pourront être utilisés librement (même si la preuve n'a pas été effectuée).

1. On considère le polynôme :

$$R(X) = 1 - X + pq^{N-1}X^N$$

   et on admet que :

$$(qX - 1)\, Q(X) = R(X) \quad \text{et} \quad XR'(X) - NR(X) = (N-1)\, X - N.$$

   Soit z un complexe tel que

$$Q(z) = 0 \quad \text{et} \quad Q'(z) = 0.$$

Montrer que $R(z) = 0$ et $R'(z) = 0$. En déduire que $z \in [0, +\infty[$ puis obtenir une contradiction.

Par conséquent chaque racine complexe de Q est de multiplicité 1 donc, d'après le théorème de d'Alembert Gauss, il existe $N-1$ complexes non nuls et distincts $z_1, .., z_{N-1}$ tels que :

$$Q(X) = (X - z_1) \cdots (Z - z_{N-1}).$$

2. On considère l'application linéaire

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_{N-2}[X] & \to & \mathbb{C}^{N-1} \\ S & \mapsto & \left(S\left(\frac{1}{z_1}\right), .., S\left(\frac{1}{z_{N-1}}\right) \right) \end{array} \right.$$

où $z_1, .., z_{N-1}$ sont les $N-1$ racines distinctes de Q.

   (a) Prouver que f est un isomorphisme.

   (b) Ecrire sa matrice A dans les bases canoniques de $\mathbb{C}_{N-2}[X]$ et $\mathbb{C}^{N-1}$. Expliciter ${}^tA$ (*la transposée de* A).

   (c) En déduire que le système :

$$(\mathcal{S}) : \left\{ \begin{array}{r} x_1 + \cdots + x_{N-1} = P(E_1) \\ \dfrac{x_1}{z_1} + \cdots + \dfrac{x_{N-1}}{z_{N-1}} = P(E_2) \\ \vdots \\ \dfrac{x_1}{(z_1)^{N-2}} + \cdots + \dfrac{x_{N-1}}{(z_{N-1})^{N-2}} = P(E_{N-1}) \end{array} \right.$$

   admet une unique solution $(\alpha_1, .., \alpha_{N-1})$.

3. Soient $(\alpha_1, .., \alpha_{N-1})$ l'unique solution du système $(\mathcal{S})$ (cf. question **III.2c**). on considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{\alpha_1}{(z_1)^{n-1}} + \cdots + \frac{\alpha_{N-1}}{(z_{N-1})^{n-1}} = \sum_{j=1}^{N-1} \alpha_j \left(\frac{1}{z_j}\right)^{n-1}.$$

Montrer que pour tout $n \geqslant N$:

$$u_n = \sum_{k=1}^{N-1} pq^{k-1} u_{n-k}$$

En déduire que pour tout $n \geqslant 1$:

$$P(E_n) = u_n.$$