

1

# Mathématiques

Option Scientifique

■ Mercredi 18 avril 2007 de 8 h 00 à 12 h 00

**Durée : 4 heures**

*Candidats bénéficiant de la mesure "Tiers-temps":  
8 h 00 – 13 h 20*

Aucun document n'est autorisé.  
Aucun instrument de calcul n'est autorisé.

L'énoncé comporte 7 pages.

*Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.*

## 1. EXERCICE.

1. A l'aide de développements limités usuels que l'on rappellera clairement, montrer que lorsque  $x$  est au voisinage de 0 on a

$$\ln(2 - e^x) = -x - x^2 + o(x^2).$$

2. a. Montrer que pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2, on a :

$$2 - e^{1/k} \in ]0, 1[.$$

- b. En déduire le signe de  $\ln(2 - e^{1/k})$ , pour tout entier  $k$  supérieur ou égal à 2.  
 c. Quelle est la nature de la série de terme général  $\ln(2 - e^{1/k})$  ?  
 d. Pour  $n$  entier supérieur ou égal à 2, on pose

$$V_n = \sum_{k=2}^n \ln(2 - e^{1/k}) \text{ et } u_n = \exp V_n.$$

Déterminer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n.$$

3. a. Montrer que

$$\ln(nu_n) = \sum_{k=2}^n \left[ \ln(2 - e^{1/k}) - \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right].$$

- b. Déterminer un équivalent, quand  $k$  tend vers  $+\infty$ , de  $\ln(2 - e^{1/k}) - \ln(1 - \frac{1}{k})$ .  
 c. En déduire que  $u_n$  est équivalent, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , à  $\frac{K}{n}$  avec  $K > 0$ .  
 Quelle est la nature de la série de terme général  $u_n$  ?

4. On pose

$$S_n = \sum_{k=2}^n (-1)^k u_k.$$

- a. Etudier le sens de variations de la suite  $(u_n)_{n \geq 2}$ .  
 b. Montrer que les suites  $(S_{2n})_{n \geq 1}$  et  $(S_{2n+1})_{n \geq 1}$  sont deux suites adjacentes.  
 c. En déduire la nature de la série de terme général  $(-1)^n u_n$ .

## 2. EXERCICE.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $n \geq 2$ , à coefficients réels. Pour tout élément  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on appelle "trace de  $A$ ", et on note  $Tr(A)$ , la somme des éléments diagonaux, c'est-à-dire :

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}.$$

On admet que  $Tr$  est une application linéaire de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{R}$  telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad Tr(AB) = Tr(BA).$$

On note  ${}^tA$  la transposée de la matrice  $A$ .

1. Soit  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(A, B) = Tr({}^tAB) \quad (\text{où } {}^tAB = {}^tA \times B).$$

Exprimer  $\varphi(A, B)$  en fonction des coefficients de  $A$  et  $B$  et montrer que  $\varphi$  est un produit scalaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

On note  $N$  la norme associée à ce produit scalaire.

2. Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Le but de cette question est de prouver que

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

- a. Justifier l'existence de  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que

$${}^tP({}^tAA)P = D$$

où  $P$  est une matrice orthogonale et  $D$  une matrice diagonale.

On notera par la suite  $\lambda_i$  le coefficient  $d_{ii}$  de la matrice  $D = (d_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ .

- b. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  ${}^tAA$  et  $X$  un vecteur propre associé. En calculant  ${}^tX{}^tAAX$  de deux manières différentes, montrer que  $\lambda \geq 0$ .
- c. On pose  $S = {}^tP(B{}^tB)P = (s_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ . Montrer que

$$[N(A)]^2 = Tr(D), \quad [N(B)]^2 = Tr(S), \quad [N(AB)]^2 = Tr(SD).$$

d. Montrer que

$$\text{Tr}(SD) = \sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii}.$$

e. On note  $E_i$  le  $i^{\text{ème}}$  vecteur de la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , espace des matrices à  $n$  lignes et une colonne, à coefficients réels. Montrer que

$${}^t E_i S E_i = \|{}^t B P E_i\|^2,$$

où  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , puis calculer  ${}^t E_i S E_i$  en fonction des coefficients de  $S$ .

Qu'en déduit-on, pour  $i$  entier compris entre 1 et  $n$ , sur le signe de  $s_{ii}$  ?

f. Montrer que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i s_{ii} \leq \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i \right) \left( \sum_{i=1}^n s_{ii} \right)$$

puis conclure que

$$N(AB) \leq N(A)N(B).$$

### 3. PROBLEME.

Le préliminaire, les parties I et II sont indépendants.

#### 3.1. Préliminaire

On considère deux variables aléatoires à densité  $X$  et  $Y$  définies sur un même espace probabilisé, admettant des espérances  $E(X), E(Y)$  et des variances  $V(X), V(Y)$ . On suppose  $V(X) > 0$ . On définit la covariance de  $X$  et  $Y$  par

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y).$$

1. Montrer que pour tout nombre réel  $\lambda$ ,

$$V(\lambda X + Y) = \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{Cov}(X, Y) + V(Y).$$

2. a. En étudiant le signe du trinôme précédent, montrer que

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 \leq V(X)V(Y).$$

b. A quelle condition nécessaire et suffisante a-t-on l'égalité

$$(\text{Cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y) ?$$

### 3.2. Partie I : Etude d'une fonction de deux variables

$n$  désigne un entier non nul,  $A$  et  $S$  deux réels positifs ou nuls vérifiant  $S > nA$ .  
On définit sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  la fonction  $L_n$  par :

$$\begin{cases} L_n(a, b) = \frac{1}{b^n} e^{-\frac{1}{b}(-na+S)} & \text{si } 0 \leq a \leq A \\ L_n(a, b) = 0 & \text{si } a > A \end{cases}$$

- Justifier que  $L_n$  est de classe  $C^1$  sur l'ouvert  $]0, A[ \times ]0, +\infty[$ .  
Montrer que  $L_n$  n'admet pas d'extremum sur cet ouvert.
- Montrer que
 
$$\forall a \in [0, A[, \forall b \in ]0, +\infty[, L_n(a, b) < L_n(A, b).$$
 Montrer que ce résultat est encore vrai pour tout  $a$  de  $]A, +\infty[$ .
- Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(b) = L_n(A, b)$ .  
Montrer que  $g$  admet un maximum absolu sur  $]0, +\infty[$ , atteint en un point  $b_0$  que l'on exprimera en fonction de  $A, S, n$ .
- Déduire de ce qui précède que  $L_n$  admet sur  $]0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  un maximum absolu atteint en un unique point  $(a_0, b_0)$  que l'on précisera.

### 3.3. Partie II : Etude d'une loi

Soit  $a \geq 0$  et  $b > 0$ . On considère la fonction  $f_{a,b}$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f_{a,b}(x) = \frac{1}{b} e^{-\frac{(x-a)}{b}} & \text{si } x \geq a \\ f_{a,b}(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Vérifier que  $f_{a,b}$  est bien une densité de variable aléatoire. On note  $\mathcal{E}(a, b)$  la loi associée.

On considère désormais une variable aléatoire  $X$  de loi  $\mathcal{E}(a, b)$ .

2. Déterminer la fonction de répartition de  $X$ .
3. On pose  $Y = X - a$ . Déterminer la loi de  $Y$  et la reconnaître.  
En déduire  $E(X)$  et  $V(X)$ .
4. Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Montrer que  $X$  admet un moment d'ordre  $p$ ,  $E(X^p)$ , et pour  $p > 0$  déterminer une relation liant  $E(X^p)$  et  $E(X^{p-1})$ .
5. *Simulation de la loi  $\mathcal{E}(a, b)$ .*
  - a. Soit  $U$  une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 1[$ .  
Montrer que la variable aléatoire  $-b \ln(1 - U) + a$  suit une loi  $\mathcal{E}(a, b)$ .
  - b. On rappelle qu'en langage Pascal, la fonction `random` permet de simuler une variable aléatoire de loi uniforme sur  $[0, 1[$ .  
Ecrire, en langage Pascal, une fonction `tirage`, de paramètres `a` et `b` simulant une variable aléatoire de loi  $\mathcal{E}(a, b)$ .

### 3.4. Partie III : Estimation des paramètres $a$ et $b$

$a$  et  $b$  désignent toujours deux réels tels que  $a \geq 0$  et  $b > 0$ . On considère désormais une suite de variables aléatoires  $(X_i)_{i \geq 1}$  indépendantes identiquement distribuées de loi  $\mathcal{E}(a, b)$ .

Pour  $n$  entier supérieur ou égal à 2, on considère les variables aléatoires  $S_n$  et  $Y_n$  définies par  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$  et  $Y_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$ .

Le but de cette partie est de déterminer des estimateurs de  $a$  et  $b$ .

1. La fonction `tirage`, ainsi que les variables informatiques `a, b, X, S, Y` de type `real` et `i, n` de type `integer` étant supposées définies, compléter le corps du programme principal suivant, de manière à ce qu'il simule  $S_n$  et  $Y_n$  (les valeurs étant stockées

respectivement dans  $S$  et  $Y$ ).

```

begin
  randomize ;
  readln(a,b,n) ;
  X:=tirage(a,b) ;
  S:=... ;
  Y:=...;
  for i:= 2 to n do...
                                .....
                                .....
                                .....
  ...
end.

```

2. Déterminer l'espérance et la variance de  $S_n$ .
3. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire  $(X_1 - a) + (X_2 - a) + \dots + (X_n - a)$ ?  
En déduire une densité de  $S_n$ .
4. Déterminer la fonction de répartition de  $Y_n$ .  
En déduire que  $Y_n$  suit une loi  $\mathcal{E}(a_n, b_n)$  (on précisera  $a_n$  et  $b_n$ ).  
Donner les valeurs de  $E(Y_n)$  et  $V(Y_n)$ .
5.
  - a. Calculer le biais ainsi que le risque quadratique de  $Y_n$  en tant qu'estimateur de  $a$ .
  - b. Rappeler l'inégalité de Markov pour une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2.  
A l'aide de ce qui précède, prouver que  $(Y_n)$  est une suite d'estimateurs de  $a$  asymptotiquement sans biais, convergente.
6. On pose  $Z_n = \frac{S_n}{n} - Y_n$ .
  - a. Calculer le biais de  $Z_n$  en tant qu'estimateur de  $b$ .
  - b. On note  $r_{Z_n}(b)$  le risque quadratique de  $Z_n$ . Montrer que

$$r_{Z_n}(b) = \frac{2b^2}{n^2} + \frac{b^2}{n} - \frac{2}{n} \text{Cov}(S_n, Y_n).$$

c. A l'aide du préliminaire montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} r_{Z_n}(b) = 0$$

et en déduire que  $(Z_n)$  est une suite d'estimateurs de  $b$  asymptotiquement sans biais, convergente.

7. Pour un échantillon donné  $(x_1, \dots, x_n)$ , avec  $\min \{x_1, \dots, x_n\} \neq \max \{x_1, \dots, x_n\}$ , correspondant à une réalisation des  $n$  variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$ , on définit la fonction  $L$  sur  $[0, +\infty[ \times ]0, +\infty[$  par

$$L(a, b) = \prod_{i=1}^n f_{a,b}(x_i).$$

- Montrer que  $L$  est la fonction  $L_n$  définie dans la partie I, pour des valeurs de  $A$  et  $S$  que l'on précisera en fonction des  $x_i$ .
- Comparer les estimations de  $a$  et  $b$  obtenues sur l'échantillon  $(x_1, \dots, x_n)$  à partir de  $Y_n$  et  $Z_n$  avec les valeurs  $a_0$  et  $b_0$  obtenues dans la partie I.

