MATHÉMATIQUES I

Option Scientifique

École conceptrice : EMLYON

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants.

Le problème 1 porte sur l'algèbre linéaire et est composé de trois parties.
La partie I étudie les propriétés générales des matrices stochastiques, en particulier leurs valeurs propres. La partie II étudie des suites de moyennes de puissances d'une matrice stochastique. La partie III amène l'aspect probabiliste et l'étude d'un exemple numérique.

Le problème 2 étudie une fonction f définie par une intégrale et est composé de préliminaires et de deux parties. Les préliminaires permettent d'obtenir les valeurs de certaines sommes de séries utiles par la suite. La partie I étudie les propriétés générales de f et sa représentation sous forme d'une somme de série. La partie II étudie la dérivabilité de f et on termine par le tracé de la courbe représentative de f.

Problème 1

Partie I

1.a. L'équivalence logique n'est pas toujours bien justifiée.
Il y a quelquefois confusion entre vecteur et nombre.

1.b. Les candidat(e)s, pour la plupart, oublient de rappeler que V n'est pas nul.

2. Peu de candidat(e)s pensent à utiliser le résultat de la question 1.a.
Lors de l'étude du terme général du produit de deux matrices, la manipulation des symboles de sommation n'est pas toujours correcte, et, dans les copies faibles, le terme général du produit de deux matrices n'est pas obtenu, d'où l'impossibilité de justifier qu'il soit positif ou nul.

3.a. On peut répondre aux deux parties de cette question sans aucun calcul.
Il y a beaucoup d'erreurs sur la nature de A_1. Certain(e)s candidat(e)s croient à tort que A_1 est symétrique. D'autres écrivent, à tort, que toute matrice triangulaire dont les termes diagonaux sont tous non nuls est diagonalisable.
Beaucoup de candidat(e)s confondent inversibilité et diagonalisabilité.
Dans certaines copies, on confond l'ordre d'une matrice carrée (3 ici) et la dimension de $\mathbf{M}_3(\mathbb{R})$ (qui est 9).

3.b. Peu de candidat(e)s pensent à faire intervenir la matrice identité.
Certain(e)s candidat(e)s croient à tort que, si une matrice carrée d'ordre 3 n'a que deux valeurs propres, alors elle n'est pas diagonalisable. C'est faux, comme le montre l'exemple $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4.a. Question discriminante : la résolution est correcte dans les bonnes copies, absente ou grossièrement fausse dans les autres.

L'inégalité triangulaire est peu ou mal utilisée.

4.b. Trop de candidat(e)s oublient de montrer $|x_i| > 0$. Le rappel de $|x_i| \geqslant 0$ ne suffit pas pour pouvoir simplifier par $|x_i|$ dans l'inégalité.

Il y a quelquefois confusion entre $|x_i| \neq 0$ et : $\forall\, j \in \{1, ..., p\}, \quad |x_j| \neq 0$.

Partie II

1.a. Question souvent traitée, en général de façon satisfaisante.

1.b. Des candidat(e)s se lancent dans une récurrence qui tourne à une démonstration directe, sans utilisation de l'hypothèse de récurrence.

Beaucoup de candidat(e)s ont cru que $\mathcal{ST}_p$ était stable par addition, ce qui est faux.

2. L'oubli du cas $x = -1$ est quasi-systématique, dans plus de 90% des copies..

Autrement dit, pour l'immense majorité des candidat(e)s, pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $|x| \leqslant 1$ et $x \neq 1$, alors $|x| < 1$, ce qui est faux.

3. Beaucoup de candidat(e)s oublient de rappeler le lien entre M_n et les valeurs propres de A, afin de pouvoir utiliser les résultats de la question 2.

La conclusion sur B_n n'est en général pas clairement justifiée, les candidat(e)s omettant souvent de rappeler les résultats admis en début de problème.

4.a. Trop de candidat(e)s affirment, à tort, qu'une matrice semblable à une matrice stochastique est elle-même stochastique. C'est clairement faux, puisque, par exemple, D n'est pas stochastique, la somme des éléments de la dernière ligne de D n'étant pas égale à 1.

4.b. Dans beaucoup de copies, le résultat est affirmé sans preuve, comme une évidence.

Partie III

1. Les systèmes complets d'événements ne sont pas, en général, clairement dégagés. Il y a de fréquentes confusions entre probabilités et événements. Trop de copies confondent commentaire et démonstration. Certain(e)s candidat(e)s croient, à tort, qu'il y a équiprobabilité.

2. Appliquer le théorème des probabilités totales, en dégageant clairement un système complet d'événements.

3. Question facile, souvent abordée.

Il y a cependant trop d'erreurs dans la détermination de P_1 puis dans le calcul de P_1^{-1}.

4. Souvent, la première limite est correcte, mais la seconde n'est pas abordée ou est fausse.

5. Trop de confusions entre nombre, matrice ligne, matrice carrée.

Peu de candidat(e)s essaient d'expliquer le résultat obtenu.

Problème 2

Préliminaires

1. Beaucoup trop d'erreurs dans l'étude de $\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Certain(e)s candidat(e)s croient à tort qu'il s'agit d'une série de Riemann. Il y a de grosses confusions d'indices : on ne peut pas poser $n = 2k+1$, car les termes d'indices pairs sont alors soit manquants, soit introduits à tort. L'équivalent proposé pour $\frac{1}{(2k+1)^2}$ est souvent faux, $\frac{1}{2k^2}$ ou $\frac{1}{k^2}$, au lieu du correct $\frac{1}{4k^2}$.

Beaucoup de candidat(e)s oublient, lors de l'utilisation du théorème de majoration ou du théorème d'équivalence, de rappeler qu'il s'agit de séries à termes positifs.

La convergence de la troisième série proposée est souvent mal traitée.

2. et **3.** Questions souvent absentes ou mal traitées. Les candidat(e)s ne pensent pas à étudier les sommes partielles.

Partie I

1. Les correcteurs ont été étonnés des insuffisances des candidat(e)s dans cette question. Le rapport de l'année précédente avait pourtant pointé ces insuffisances sur une question analogue. Le jury conseille aux candidat(e)s de lire les rapports des sessions antérieures.

Trop de copies affirment à tort que l'application envisagée est continue sur $[0\,;1]$, alors qu'elle n'est pas définie en 0 lorsque $x < 0$.

D'une autre côté, beaucoup de candidat(e)s omettent la question de la continuité.

Lors de l'utilisation d'un théorème de majoration ou d'équivalence, trop de candidat(e)s oublient de citer la positivité.

2. En général, la valeur de $f(0)$ est correcte, mais pas celle de $f(1)$.

Beaucoup de candidat(e)s ne connaissent pas une primitive de $t \longmapsto \ln(1+t)$.

Les correcteurs ont rencontré trop de calculs aberrants pour la seconde intégrale demandée.

3. Certain(e)s candidat(e)s essaient, à tort, de montrer : $\frac{t^x}{1+t} \leqslant \frac{1}{1+x}$.

4.a. Les réponses à cette question simple sont souvent fausses ou approximatives. L'inégalité $\ln t < 0$ n'est invoquée que dans moins de la moitié des copies. Il y a souvent confusion entre puissance et exponentielle.

4.b. En général, les réponses sont correctes. Cependant, certain(e)s candidat(e)s étudient $f(x+1) - f(x)$, confondant ainsi fonction et suite.

5. Question assez souvent traitée, et correctement.

6. Très peu de bonnes réponses. Pour l'immense majorité des candidat(e)s, $f(x+1) \underset{x \longrightarrow +\infty}{\sim} f(x)$ est une évidence, et additionner des équivalents ne les gêne pas. Il y a souvent confusion entre limite et équivalent.

La notion d'équivalent ne semble pas assimilée.

7.a. Réponses en général correctes, soit par récurrence, soit par intégration d'une sommation géométrique.

7.b. Il y a souvent confusion entre les rôles de x et de n.

8.a. La première partie de la question peut être résolue par simple calcul, ou en utilisant l'inégalité des accroissements finis.

Dans la seconde partie de la question, peu de candidat(e)s ont vu d'où venait le terme $\dfrac{1}{(x+1)(y+1)}$, et les correcteurs ont souvent rencontré une série de Riemann commençant à un indice 0, ce qui donne un terme non défini.

8.b. Il y a souvent confusion entre continuité et dérivabilité.

9. Peu de réponses pour la première partie de la question. La seconde partie de la question, facile, est souvent traitée.

Partie II

1. Comme en I 8.a., cette question peut être traitée par un simple calcul, ou en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Lors de la citation de l'inégalité de Taylor-Lagrange, le statut de la lettre M n'est pas clair, et il y a souvent oubli d'une valeur absolue.

2.a. La série de Riemann est souvent correctement vue.

En revanche, la seconde série est souvent très mal résolue.

2.b. Question de synthèse, permettant aux meilleur(e)s candidat(e)s de se mettre en valeur.

2.c. Question facile : il suffit de faire la liaison avec d'autres questions du problème.

3. Question peu abordée, et le tracé est souvent hésitant.

La tangente au point d'abscisse 0 est souvent absente.

Les correcteurs ont estimé qu'il s'agit d'un très bon sujet, intéressant et varié, conforme à la lettre et à l'esprit du programme, de difficulté graduée, couvrant une large partie des connaissances exigibles, de longueur satisfaisante et adapté au niveau des candidat(e)s.

Le sujet évalue la connaissance du programme, mais aussi la capacité à résoudre des problèmes et à synthétiser.

Une bonne gradation de la difficulté a permis aux candidat(e)s de mettre en valeur leur travail de préparation des deux années dans des questions de facture classique, et a aussi permis, par des questions plus fines, aux meilleur(e)s de se dégager. Les capacités à relier différentes questions, à argumenter et à synthétiser font partie des critères d'évaluation des copies.

La présentation des copies est convenable, mais l'argumentation est souvent trop vague et approximative, et la rédaction manque de clarté, de précision, de concision.

Des règles élémentaires de rédaction et de présentation ne sont pas toujours respectées. On doit éviter les abréviations abusives. Rappelons qu'il est impératif de numéroter les questions, de mettre en évidence les résultats, par exemple en les encadrant, et de séparer nettement les questions. De plus, tous les calculs doivent figurer sur la copie.

L'éventail complet des notes a été utilisé, et le sujet a joué pleinement son rôle de sélection.

Au bilan, les candidat(e)s n'ont pas été surpris(es) et le sérieux du travail a été récompensé.