Réduction endomorphismes >	Valeurs propres	Lien avec matrices	Endo diag	Réduction

Lien avec la matrice de l'application linéaire

Définition : Éléments propres d'une matrice

Soit $A\in\mathcal{M}_{n}(\K)$ et $\lambda\in\K$.

- On dit que λ est une **valeur propre** de la matrice A si et seulement si : $$\exists X\in\mathcal{M}_{n,1}(\K)\setminus\{0\}\;/\; AX=\lambda X$$c'est à dire que $\mathrm{rg}(A-\lambda I_{n})<n$. Une telle matrice colonne X est alors appelée **vecteur propre** de la matrice A.
- On appelle **sous-espace propre** de la matrice A associé à la valeur propre λ le sous-ensemble de $\mathcal{M}_{n,1}(\K)$ constitué du vecteur nul et des vecteurs propres associés à λ que l'on note aussi : $$E_{\lambda}(A)=\left\{ X\in\mathcal{M}_{n,1}(\K)\,\mid\, AX=\lambda X\right\}$$Comme on peut identifier (au sens d'isomorphisme d'espaces vectoriels) l'ensemble $\mathcal{M}_{n}(\K)$ avec $\mathcal{L}(E)$ (où E est de dimension finie égale à n) ainsi que l'ensemble $\mathcal{M}_{n,1}(\K)$ avec E (une base de E étant préalablement choisie), on s'autorise alors à écrire : $$E_{\lambda}(A)=\mathrm{Ker}(A-\lambda I_{n})$$qui est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\K)$ de dimension : $$\dim(E_{\lambda}(A))=n-\mathrm{rg}(A-\lambda I_{n})$$
- On appelle **spectre** de la matrice A l'ensemble $\mathrm{Sp}(A)$ constitué des valeurs propres de A.

<u>Exemple</u>

1. Soit $A\in\mathcal{M}_{n}(\R)$. Montrer que A et ${}^t\!A$ ont les mêmes valeurs propres avec des sous-espaces propres associés de même dimension.
2. Trouver une matrice $A\in\mathcal{M}_{2}(\R)$ (autre qu'une matrice diagonale) telle que A et ${}^t\!A$ aient les mêmes sous-espaces propres (que l'on précisera) et une matrice $B\in\mathcal{M}_{2}(\R)$ telle que B et ${}^t\!B$ n'aient pas les mêmes sous-espaces propres.

Théorème : Lien endomorphisme-matrice

On suppose que E *est de dimension finie* $n\geqslant1$.
Soit $A\in\mathcal{M}_{n}(\K)$ et $u\in\mathcal{L}(E)$ tels que $A=\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{E}}(u)$. Alors :

- Le scalaire λ est une valeur propre de u si et seulement s'il est aussi une valeur propre de A et $\vv{x}\in E$ est un vecteur propre de u associé à λ si et seulement si $X\in\mathcal{M}_{n,1}(\K)$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ (où X représente les coordonnées de $\vv{x}$ dans la base $\mathcal{B}_{E}$.
- Pour toute valeur propre λ de A (ou de u), on peut « identifier » les sous-espaces vectoriels $E_{\lambda}(A)$ et $E_{\lambda}(u)$.
- $\mathrm{Sp}(A)=\mathrm{Sp}(u)$.
  En particulier, la matrice A est inversible si et seulement si $0\notin\mathrm{Sp}(A)$.

Méthode pratique de recherche des éléments propres

On utilise la méthode du pivot de Gauss sur la matrice $A-\lambda I$ où A est la matrice de l'endomorphisme dans une base donnée.

Exemples

1. Déterminer les valeurs et les sous-espaces propres associés de l'endomorphisme de $\R^{2}$ (resp. $\C^{2}$) représenté par $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\R^{2}$ (resp. $\C^{2}$).
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres associés de l'endomorphisme de $\R^{3}$ représenté par $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\R^{3}$.

Réduction endomorphismes >	Valeurs propres	Lien avec matrices	Endo diag	Réduction