Fonction de transfert

Théorème : Théorème de transfert, 1ère partie

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Soit $g\colon U\to\R$ où $X(\Omega)\times Y(\Omega)\subset U\subset\R^{2}$. On pose : $Z=g(X,Y)$. Alors Z est une variable aléatoire dont la loi est donnée par : $$\ds Z(\Omega)=\left\{ g(x,y)\mid(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)\right\}$$ $$\ds\forall z\in Z(\Omega),\;\mathbb{P}(Z=z)=\sum_{\substack{x\in X(\Omega) \\ y\in Y(\Omega) \\ g(x,y)=z}}{\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])}$$ De plus : $$\ds\mathcal{A}_{Z}\subset\mathcal{A}_{(X,Y)}$$ En particulier, $X+Y$, XY, $\inf(X,Y)$ et $\sup(X,Y)$ sont des variables aléatoires.

Exemples

1. On lance indéfiniment une pièce de monnaie truquée de sorte que le côté *pile* est obtenu avec la probabilité p (avec $0<p<1$) et le côté *face* est obtenu avec la probabilité $q=1-p$. On note X le rang du premier *pile* obtenu et Y celui du deuxième.
    1. Déterminer la loi de $Y-X$, son espérance et sa variance.
    2. Montrer que X et $Y-X$ sont indépendantes.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et suivant toute la même loi $\mathcal{G}(p)$.
    1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $S=\sup(X,Y)$. Admet-elle une espérance ?
    2. Déterminer la loi de la variable aléatoire $I=\inf(X,Y)$. Admet-elle une espérance ?
    3. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Z=|X-Y|$.

Théorème : Théorème de transfert, 2nde partie

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Soit $g\colon U\to\R$ où $X(\Omega)\times Y(\Omega)\subset U\subset\R^{2}$. On pose $Z=g(X,Y)$.

- La variable aléatoire Z admet une espérance si et seulement si la série $\ds\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}{g(x,y)\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])}$ converge absolument et dans ce cas, on a :
  $$\ds\mathbb{E}(Z)=\sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)}{g(x,y)\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])}$$
- Si X et Y admettent une espérance alors, pour tout couple (λ,μ) de réels, la variable aléatoire $\lambda X+\mu Y$ admet une espérance et on a :
  $$\ds\mathbb{E}(\lambda X+\mu Y)=\lambda\mathbb{E}(X)+\mu\mathbb{E}(Y)$$
- Si X et Y admettent une espérance et sont indépendantes alors XY admet une espérance et on a :
  $$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Exemple

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ et suivant toute la même loi $\mathcal{G}(p)$. On pose :

$S=\sup(X,Y)$ et $I=\inf(X,Y)$.

1. Montrer que la variable aléatoire SI admet une espérance et la calculer.
2. Montrer que la variable aléatoire $S+I$ admet une espérance et la calculer.
3. Montrer que la variable aléatoire S admet une espérance et la calculer.
4. Montrer que la variable aléatoire $|X-Y|$ admet une espérance et la calculer.

Couple aléa >	Généralités	Couples discrets	Somme indép	Transfert	Covariance