Polynômes annulateurs d'un endomorphisme

Définition

Soit E un $\K$-espace vectoriel. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et $Q=a_{0}+a_{1}X+\dots+a_{n}X^{n}\in\K[X]$.

- L'endomorphisme $Q(u)=a_{0}\mathrm{Id}_{E}+a_{1}u+\dots+a_{n}u^{n}$ est appelé **polynôme d'endomorphisme** en u.
- On dit que Q est un **polynôme annulateur** de u si et seulement si Q n'est pas le polynôme nul et $Q(u)=\Theta_{E}$.

Exemples

1. Justifier que $X-1$ est un polynôme annulateur de Id_{E}.
2. Déterminer un polynôme annulateur de Θ_{E}, d'une homothétie de rapport λ.
3. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ admettant un polynôme annulateur P. Montrer que: $P(0)\ne0\implies u\in\mathcal{GL}(E)$. Que dire de la réciproque ?
4. Soit E un $\K$-espace vectoriel de dimension $n\geqslant2$ et u un endomorphisme de E. On suppose qu'il existe un vecteur $\vv{x}$ de E tel que $(\vv{x},u(\vv{x}),u^{2}(\vv{x}),\dots,u^{n-1}(\vv{x}))$ est une base de E.
    1. Justifier qu'il existe une unique famille $(a_{0},\dots,a_{n-1})$ de scalaires telle que : $$u^{n}(\vv{x})=a_{0}\vv{x}+a_{1}u(\vv{x})+\dots+a_{n-1}u^{n-1}(\vv{x})$$
    2. Montrer que u n'admet pas de polynôme annulateur de degré strictement inférieur à n.

Théorème

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$, $(\lambda,\mu)\in\K^{2}$ et $(P,Q)\in\K[X]^{2}$. Alors : $$(\lambda P+\mu Q)(u)=\lambda P(u)+\mu Q(u)$$$$(PQ)(u)=P(u)\circ Q(u)=Q(u)\circ P(u)=(QP)(u)$$En conséquence, si P est un polynôme annulateur de u alors PQ est aussi un polynôme annulateur de u.

Théorème : Existence d'un polynôme annulateur

Tout endomorphisme d'un $\K$-espace vectoriel E de dimension finie admet un polynôme annulateur.

Remarque : Comment déterminer un polynôme annulateur en pratique ?

1. Rechercher un polynôme unitaire de degré 1 (donc de la forme $X+a$).
2. Si aucun polynôme de degré 1 ne convient, rechercher un polynôme unitaire de degré 2 (donc de la forme $X^{2}+aX+b$).
3. Si aucun polynôme de degré 2 ne convient, rechercher un polynôme unitaire de degré 3 (donc de la forme $X^{3}+aX^{2}+bX+c$).
4. On continue jusqu'à obtenir satisfaction (ce qui arrivera nécessairement compte tenu du

théorème précédent).

Le polynôme unitaire que l'on obtient est appelé **polynôme minimal** de l'endomorphisme (c'est le polynôme unitaire de plus bas degré qui annule cet endomorphisme.

Exemple

Déterminer un polynôme annulateur de $u\colon\K^{2}\to\K^{2},\;\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x+y \end{pmatrix}$.

Appli liné >	Généralités	Poly annul	Matrice	Chang base