

[Esp Eucli >](#) [Prod scal](#) [Norme](#) [Ortho](#) [Fam ortho](#) [Bases ortho](#) [Supplé ortho](#)

Norme

Définition

Soit φ un produit scalaire sur E .

- On appelle **norme associée** au produit scalaire φ l'application $\|\cdot\|$ de E vers \mathbb{R}^+ définie par :

$$\forall x \in E, \|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$$
- On dit d'un vecteur x de E qu'il est **unitaire** pour la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si $\|x\| = 1$.

Remarque

Attention à ne pas confondre les deux interprétations possibles de la locution « polynôme unitaire » :

- polynôme de coefficient dominant égal à 1 (c'est presque toujours l'interprétation à faire),
- polynôme de norme 1 pour le produit scalaire défini sur un certain espace vectoriel de polynômes (en général, on précise de norme 1 plutôt que unitaire).

Théorème : Propriétés de la norme

Soit φ un produit scalaire sur E de norme associée $\|\cdot\|$. Alors :

- $\forall x \in E, \|x\| = 0 \iff x = 0_E$,
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$,
- $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\varphi(x, y)$,
- Inégalité de Cauchy-Schwarz** :
 $\forall (x, y) \in E^2, \left| \varphi(x, y) \right| \leq \|x\| \|y\|$
 De plus, cette inégalité est une égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.
- Inégalité triangulaire** :
 $\forall (x, y) \in E^2, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Exemples

- Démontrer que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \left| \langle x, y \rangle \right| \leq \frac{1}{4} \left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \right)$$
- Déterminer une CNS portant sur les vecteurs x et y pour que l'inégalité triangulaire soit une égalité.
- Montrer que pour toutes fonctions f et g continues sur $[a, b]$ (avec $a < b$), on a :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t) \mathrm{d}t \right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 \mathrm{d}t \right) \left(\int_a^b g(t)^2 \mathrm{d}t \right)$$

[Esp Eucli >](#) [Prod scal](#) [Norme](#) [Ortho](#) [Fam ortho](#) [Bases ortho](#) [Supplé ortho](#)

From:

<https://alainguichet.fr/ecs-touchard/wiki/> - **Prépa ECG Le Mans, lycée Touchard-Washington**

Permanent link:

<https://alainguichet.fr/ecs-touchard/wiki/doku.php?id=math:2:norme>

Last update: **2020/05/25 09:40**

