Appli liné >	Généralités	Poly annul	Matrice	Chang base

Généralités sur les applications linéaires

Dans ce paragraphe, E et F sont deux $\K$-espaces vectoriels.

Définition

- Une application $u\colon E\to F$ est dite **linéaire** si et seulement si : $$\forall(\lambda,\mu)\in\K^{2},\;\forall\left(\vv{x},\vv{y}\right)\in E^{2},\; u\left(\lambda\vv{x}+\mu\vv{y}\right)=\lambda u\left(\vv{x}\right)+\mu u\left(\vv{y}\right)$$L'ensemble des telles applications linéaires est noté $\mathcal{L}(E,F)$. Si une telle application est bijective, on l'appelle **isomorphisme** de E dans F (on dit aussi que E et F sont isomorphes).
- Dans le cas où $F=E$, ces applications sont appelées **endomorphismes** de E et l'ensemble des endomorphismes est noté $\mathcal{L}(E)$. Si une telle application est aussi bijective, on l'appelle **automorphisme** de E et l'ensemble des automorphismes se note $\mathcal{GL}(E)$.
- Dans le cas où $F=\K$, ces applications sont appelées **formes linéaires** sur E.

Théorème

Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$. Alors :

- $u\left(\vv{0_E}\right)=\vv{0_F}$
- $\forall(\lambda_{1},\dots,\lambda_{n})\in\K^{n},\;\forall(\vv{x_1},\dots,\vv{x_n})\in E^{n},\; u\left(\lambda_{1}\vv{x_1}+\dots+\lambda_{n}\vv{x_n}\right)=\lambda_{1}u\left(\vv{x_1}\right)+\dots+\lambda_{n}u\left(\vv{x_n}\right)$
- $\forall\left(\vv{x_1},\dots,\vv{x_n}\right)\in E^{n},\; u\left(\mathrm{Vect}\left(\vv{x_1},\dots,\vv{x_n}\right)\right)=\mathrm{Vect}\left(u\left(\vv{x_1}\right),\dots,u\left(\vv{x_n}\right)\right)$
- u est injective si et seulement si l'image de toute famille libre dans E est libre dans F
- u est surjective si et seulement si l'image d'une famille génératrice de E est génératrice de F
- u est bijective (donc isomorphisme) si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

Théorème : Construction d'une application linéaire

Soit $(\vv{x_1},\dots,\vv{x_n})$ une base de E et $(\vv{y_1},\dots,\vv{y_n})$ une famille de vecteurs de F. Alors : $$\ds\exists!u\in\mathcal{L}(E,F)\;/\;\forall i\in\llbracket1,n\rrbracket,\; u\left(\vv{x_i}\right)=\vv{y_i}$$

Théorème : Structure d'espace vectoriel (et d'algèbre)

- L'ensemble $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel (comme sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de E dans F), c'est à dire que toute combinaison linéaire

d'applications linéaires est encore une application linéaire.
- Si E et F sont de dimension finie alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension finie et on a :
$$\dim(\mathcal{L}(E,F))=\dim(E)\times\dim(F)$$En particulier :
$$\dim(\mathcal{L}(E))=\dim(E)^{2}$$
- La composée, lorsqu'elle existe, de deux applications linéaires u et v est encore une application linéaire. Dans le cas où ce sont aussi des isomorphismes alors $v\circ u$ est un isomorphisme et : $$(v\circ u)^{-1}=u^{-1}\circ v^{-1}$$

Remarques

- L'ensemble $\mathcal{GL}(E)$ n'est pas un espace vectoriel : si $u\in\mathcal{GL}(E)$ alors $1\cdot u+(-1)\cdot u=\Theta\notin\mathcal{GL}(E)$.
- En algèbre linéaire, si $u\in\mathcal{L}(E)$ alors la notation u^{n} désigne la composée $\underset{n\,\mathrm{facteurs}}{\underbrace{u\circ\dots\circ u}}$ (définie par récurrence: $u^{0}=\mathrm{Id}_{E}$ et $u^{n+1}=u^{n}\circ u=u\circ u^{n}$).

Théorème : Formule du binôme de Newton

Soit u et v deux endomorphismes de E tels que $\boxed{v\circ u=u\circ v}$. Alors :
$$\ds\forall n\in\N,\;(u+v)^{n}=\sum_{k=0}^{n}{\binom{n}{k}u^{k}\circ v^{n-k}}=\sum_{k=0}^{n}{\binom{n}{k}u^{n-k}\circ v^{k}}$$

Définition : Noyau et image

Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$.

- On appelle **noyau** de u l'ensemble :
$$\ds\mathrm{Ker}(u)=u^{-1}\left(\left\{ \vv{0_F}\right\} \right)=\left\{ \left.\vv{x}\in E\,\right|\; u\left(\vv{x}\right)=\vv{0_F}\right\}$$
- On appelle **image** de u l'ensemble :
$$\mathrm{Im}(u)=u(E)=\left\{ \left.\vv{y}\in F\,\right|\;\exists\vv{x}\in E\;/\; u\left(\vv{x}\right)=\vv{y}\right\}$$
- Lorsque l'image de u est de dimension finie, sa dimension est appelée rang de u et se note $\mathrm{rg}(u)$.

Théorème : Noyau/image et injectivité/surjectivité

Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$. Alors :

- $\mathrm{Ker}(u)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-espace vectoriel de F
- l'application u est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(u)=\left\{ \vv{0_E}\right\}$
- l'application u est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(u)=F=u(E)$.

Théorème : Théorème du rang

On suppose que E est de dimension finie (peu importe pour F). Soit $u\in\mathcal{L}(E,F)$.

- On a : $$\ds\dim(E)=\dim(\mathrm{Ker}(u))+\mathrm{rg}(u)=\dim(\mathrm{Ker}(u))+\dim(\mathrm{Im}(u))$$
- Dans le cas où $F=E$, les propositions suivantes sont équivalentes :
  - u est injective
  - u est surjective
  - u est bijective

Remarque

Lorsque $\dim(F)=\dim(E)$ et $F\ne E$, le dernier résultat n'est pas utilisable tel quel même s'il est valide, on revient à l'utilisation du premier point.

Exemples

1. Déterminer tous les endomorphismes u de $\R^{2}$ tels que : $u^{2}=\Theta$.
2. Soit E un $\K$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f et g deux endomorphismes de E tels que :
   $$\ds g\ne\Theta_{E}\qquad f\circ g=\Theta_{E}\qquad f+g\in\mathcal{GL}(E)$$
   1. Justifier que $\mathrm{Im}(g)\subset\mathrm{Ker}(f)$ puis que $E=\mathrm{Im}(f)+\mathrm{Im}(g)$.
   2. En déduire que $\mathrm{Ker}(f)=\mathrm{Im}(g)$ puis que $E=\mathrm{Ker}(f)\oplus\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Ker}(g)\oplus\mathrm{Im}(g)$.

Définition

On appelle **hyperplan** de E tout noyau d'une forme linéaire non nulle.

Théorème

On suppose que E est de dimension finie. Tout hyperplan de E est de dimension finie égale à $\dim(E)-1$.

Définition

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E. On dit que F est **stable** par u si seulement si $u(F)\subset F$, c'est à dire si et seulement si :
$$\forall\vv{x}\in F,\; u\left(\vv{x}\right)\in F$$

Exemples

1. Déterminer les sous-espaces d'un espace vectoriel E stables par Id_{E} puis par Θ_{E}.
2. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et $D=\mathrm{Vect}(\vv{x})$ (vecteur non nul). Déterminer une CNS portant sur $\vv{x}$ pour que la droite D soit stable par u.
3. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et $\lambda\in\K$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u-

\lambda\mathrm{Id}_{E})$ est stable par u.

4. Soit $u \colon \K^{2}\to\K^{2},\;\begin{pmatrix}x\\ y \end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x+y\\ x+y \end{pmatrix}$. Justifier que u est linéaire puis déterminer tous les sous-espaces de $\K^{2}$ stables par u.
5. Déterminer les sous-espaces stables par l'endomorphisme u de $\R^{3}$ représenté par la matrice :
$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 5 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$dans la base canonique de $\R^{3}$.

Remarque

Soit $u\in\mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace de E stable par u. Alors, l'application $u_{F}\colon F\to F,\;\vv{x}\mapsto u\left(\vv{x}\right)$ est un endomorphisme de F appelé **endomorphisme induit** par u sur le sous-espace stable F.

Appli liné >	Généralités	Poly annul	Matrice	Chang base