Extrema >	Extremum global	Extremum local sur un ouvert	Extremum sous contrainte

Extremum sous contrainte

Contrainte quelconque

Définition

Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^{1}$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\R^{n}$. Soit $c\in\R$. On pose : $$\ds\mathcal{C}=\left\{ M\in\mathcal{O}\mid\varphi(M)=c\right\} $$Soit $f\colon\mathcal{O}\to\R$.

- L'ensemble $\mathcal{C}$ est appelé **contrainte**.
- On dit que $\mathcal{C}$ est une **contrainte non critique** si et seulement si : $$\ds\forall M\in\mathcal{C},\;\nabla\varphi(M)\ne\vv{0}$$
- On dit que f admet un **maximum** (resp. **minimum**) **global** en A sous la contrainte $\mathcal{C}$ si et seulement si $A\in\mathcal{C}$ et : $$\ds\forall M\in\mathcal{C},\; f(M)\leqslant f(A)\quad(\text{resp. }f(M)\geqslant f(A))$$c'est à dire que la restriction de f à $\mathcal{C}$ admet un maximum (resp. minimum) global en A.
- On dit que f admet un **maximum** (resp. **minimum**) **local** en A sous la contrainte $\mathcal{C}$ si et seulement si $A\in\mathcal{C}$ et : $$\ds\exists r>0\;/\;\forall M\in\mathcal{C},\;\|M-A\|\leqslant r\;\implies\; f(M)\leqslant f(A)\quad(\text{resp. }f(M)\geqslant f(A))$$c'est à dire que la restriction de f à $\mathcal{C}$ admet un maximum (resp. minimum) local en A.

Exemples

1. Soit f définie sur $\R^{2}$ par : $f(x,y)=\sqrt{1-(x^{2}+y^{2})}$ si $x^{2}+y^{2}\leqslant1$ et $f(x,y)=0$ sinon.
   Soit $\ds\mathcal{C}_{1}=\left\{ (x,y)\in\R^{2}\mid x+y=\frac{1}{2}\right\} $ et $\ds\mathcal{C}_{2}=\left\{ (x,y)\in\R^{2}\mid xy=\frac{1}{4}\right\} $.
   1. Montrer que $\mathcal{C}_{1}$ et $\mathcal{C}_{2}$ sont des contraintes non critiques.
   2. Montrer que f admet un maximum et un minimum local sous chacune de ces deux contraintes.
2. Soit f définie sur $\R^{3}$ par : $f(x,y,z)=xyz$.
   Soit $\mathcal{C}_{1}=\left\{ (x,y,z)\in\R^{3}\mid x+y+z=1\right\} $ et $\mathcal{C}_{2}=\left\{ (x,y,z)\in\R^{3}\mid x^{2}+y^{2}+z^{2}=1\right\} $.
   1. Montrer que $\mathcal{C}_{1}$ et $\mathcal{C}_{2}$ sont des contraintes non critiques.
   2. Montrer que f admet un maximum et un minimum local sous chacune de ces deux contraintes.

Théorème : Condition nécessaire d'ordre 1, (admis)

Soit f définie et de classe $\mathcal{C}^{1}$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\R^{n}$. Soit $\mathcal{C}=\left\{ M\in\mathcal{O}\mid\varphi(M)=c\right\} $ une contrainte non critique où φ est de classe $\mathcal{C}^{1}$ sur $\mathcal{O}$ et c un réel. Si f admet un

extremum local en A sous la contrainte $\mathcal{C}$ alors :
$$\ds A\in\mathcal{C}\quad(\iff\;\varphi(A)=c)\qquad\text{et}\qquad\exists\lambda\in\R\;/\;\nabla f(A)=\lambda\nabla\varphi(A)$$

Exemple

Soit $f\colon\R^{2}\to\R$ définie par : $f(x,y)=xy$. Soit $c\in\R^{+}$. On pose : $\ds\forall(x,y)\in\R^{2},\;\varphi(x,y)=x^{2}+y^{2}$ et $\mathcal{C}_{\alpha}=\left\{ M\in\R^{2}\mid\varphi(M)=\alpha^2\right\} $ où $\alpha>0$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^{1}$ sur $\R^{2}$ puis que $\mathcal{C}$ est une contrainte non critique.
2. Déterminer les points en lesquels f est susceptible d'avoir un extremum local sous la contrainte $\mathcal{C}_{\alpha}$.
3. Montrer qu'en ces points, f admet un extremum global sous la contrainte $\mathcal{C}_{\alpha}$.

Théorème : Application aux formes quadratiques

Soit q la forme quadratique associée à une matrice symétrique réelle A de $\mathcal{M}_{n}(\R)$. Alors, q admet pour maximum (resp. minimum) global sur $\left\{ x\in\R^{n}\mid\|x\|=1\right\} $ la plus grande (resp. petite) valeur propre de A, obtenu en un vecteur propre unitaire associé à cette valeur propre.

Contraintes linéaires

Dans ce paragraphe, on se donne p formes linéaires $g_{1},\dots,g_{p}$ sur $\R^{n}$, un p-uplet $b_{1},\dots,b_{p})$ de réels et on considère le système linéaire (S) suivant : $$\ds\left\{ \begin{array}{lll} g_{1}(x_{1},\dots,x_{n}) & = & b_{1}\\ \vdots & & \vdots\\ g_{p}(x_{1},\dots,x_{n}) & = & b_{p} \end{array}\right.\iff\left\{ \begin{array}{lll} a_{1,1}x_{1}+\dots+a_{1,n}x_{n} & = & b_{1}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{p,1}x_{1}+\dots+a_{p,n}x_{n} & = & b_{p} \end{array}\right.$$dont on note $\mathcal{C}$ l'ensemble des solutions et $\mathcal{H}$ l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé. Rappelons que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\R^{n}$ et que si $X_{0}\in\mathcal{C}$ alors $X\in\mathcal{C}$ si et seulement si $X-X_{0}\in\mathcal{H}$ (ou bien $H\in\mathcal{H}\iff X_{0}+H\in\mathcal{C}$). L'ensemble $\mathcal{C}$ est fermé et non borné (en général).

Théorème

- Pour tout point M de $\R^{n}$, on a : $$\ds\mathcal{H}^{\perp}=\text{Vect}(\nabla g_{1}(M),\dots,\nabla g_{p}(M))=\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{1,n} \end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix} a_{p,1} \\ \vdots \\ a_{p,n} \end{pmatrix}\right)$$.
- Soit f de classe $\mathcal{C}^{1}$ sur un ouvert $\mathcal{O}$ de $\R^{n}$. Si f admet un extremum en A sous la contrainte $\mathcal{C}$ alors : $$\begin{cases}A\in\mathcal{C} & \\ \nabla f(A)\in\mathcal{H}^{\perp} & \end{cases}$$En particulier, pour tout vecteur unitaire $\vv{h}\in\mathcal{H}$, on a :

$$f_{\vv{h}}'(A)=0$$

Définition

On suppose que $A\in\mathcal{C}\cap\mathcal{O}$. On dit que le point A est un **point critique** de f sous la contrainte $\mathcal{C}$ si et seulement si :
$$\nabla f(A)\in\mathcal{H}^{\perp}$$

Remarque

Si f est de classe $\mathcal{C}^{2}$ sur $\mathcal{O}$, si A est un point critique sous la contrainte $\mathcal{C}$ alors, pour tout $M\in\mathcal{C}$, on a :
$$\ds f(M)=f(A)+\langle\underset{\in\mathcal{H}^{\perp}}{\underbrace{\nabla f(A)}},\underset{\in\mathcal{H}}{\underbrace{\vv{AM}}}\rangle+\frac{1}{2}q_{A}\left(\vv{AM}\right)+\|\vv{AM}\|^{2}\varepsilon(M)$$ou encore, pour tout $\vv{h}\in\mathcal{H}$:
$$\ds f(A+\vv{h})-f(A)=\frac{1}{2}q_{A}(\vv{h})+\|\vv{h}\|^{2}\varepsilon(A+\vv{h})$$ Ainsi, f admet un extremum local en A si et seulement si la forme quadratique q_{A} est de signe constant (non nul) sur $\mathcal{H}$, ce signe précisant la nature de l'extremum.

Exemple

Déterminer les extrema de $f\colon(x,y,z)\mapsto x^{2}-2y^{2}+z^{2}$ sous la contrainte $x-2y+z=1$ puis les contraintes $\left\{ \begin{array}{l}x+y+z=3\\x-y=-1\end{array}\right.$.

Remarque

On peut aussi résoudre le système fourni par la contrainte et utiliser la paramétrisation obtenue pour rechercher des extrema sur un ouvert.

Extrema >	Extremum global	Extremum local sur un ouvert	Extremum sous contrainte