

[Extrema >](#) [Extremum global](#) [Extremum local sur un ouvert](#) [Extremum sous contrainte](#)

# Condition suffisante d'existence d'un extremum global

## Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur une partie  $\mathcal{U}$  de  $\mathbb{R}^n$ . Soit  $A$  un point de  $\mathcal{U}$ .

- On dit que  $f$  admet un **maximum** (resp. **minimum**) **global** en  $A$  sur  $\mathcal{U}$  si et seulement si :  
 $\forall M \in \mathcal{U}, f(M) \leq f(A)$  (resp.  $\forall M \in \mathcal{U}, f(M) \geq f(A)$ )
- On dit que  $f$  admet un **maximum** (resp. **minimum**) **local** en  $A$  si et seulement si :  
 $\exists r > 0, \forall M \in \mathcal{U}, \forall \forall \{AM\} \subseteq \mathcal{U}, f(M) \leq f(A)$  (resp.  $f(M) \geq f(A)$ )

## Exemple

- Justifier que la fonction norme admet un minimum global sur  $\mathbb{R}^n$ . Admet-elle un maximum global sur  $\mathbb{R}^n$  ?
- Admet-elle un minimum global sur  $\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 \leq 1, \dots, 0 < x_n \leq 1 \right\}$  ? un maximum global ?

**Théorème : “Analogie” en partie au théorème des valeurs intermédiaires**, (admis)

Une fonction  $f$  définie et continue sur une partie fermée et bornée  $\mathcal{F}$  de  $\mathbb{R}^n$  admet un maximum global et un minimum global sur  $\mathcal{F}$ .

## Exemples

- Peut-on appliquer ce théorème à la situation de l'exemple qui précède ?
- Justifier que la fonction  $f$  définie par  $f(x,y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$  sur  $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \alpha \leq x^2 + y^2 \leq \beta \right\}$  (où  $0 < \alpha < \beta$ ) admet un maximum global et un minimum global. Les préciser en fonction de  $\alpha$  et de  $\beta$ .

**Théorème : Application aux formes quadratiques**

Soit  $q$  la forme quadratique associée à une matrice symétrique réelle  $A$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Alors,  $q$  admet un minimum global  $\alpha$  et un maximum global  $\beta$  sur  $\left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \right\}$ . De plus :  
 $\forall x \in \mathbb{R}^n, \alpha |x|^2 \leq q(x) \leq \beta |x|^2$

[Extrema >](#) [Extremum global](#) [Extremum local sur un ouvert](#) [Extremum sous contrainte](#)

From:

<https://alainguichet.fr/ecs-touchard/wiki/> - **Prépa ECG Le Mans, lycée Touchard-Washington**

Permanent link:

[https://alainguichet.fr/ecs-touchard/wiki/doku.php?id=math:2:existence\\_extremum\\_global](https://alainguichet.fr/ecs-touchard/wiki/doku.php?id=math:2:existence_extremum_global)

Last update: **2020/05/10 21:19**

