

Changement de base

Théorème : Théorème fondamental du changement de base

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u)$,
 $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E}(u)$ et $P = P_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}'_E}$.
 Alors :
 $A' = P^{-1} \times A \times P$

Exemple

Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 . On considère les vecteurs de \mathbb{R}^3 suivant :
 $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Préciser la matrice $P_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}$ de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' . En déduire $P_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}$.
2. Soit p l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 défini par :
 $p(v_1) = v_1 \quad p(v_2) = v_0 \quad p(v_3) = v_0$
 Préciser la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(p)$ puis déterminer la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p)$.

Théorème

Deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ représentent le même endomorphisme exprimé dans deux bases différentes. En conséquence, deux matrices semblables ont le même rang.

Exemples

1. Montrer que $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont semblables.
 1. Soit A et B deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $B = Q^{-1}AQ$ avec $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
 1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, B^k = Q^{-1}A^kQ$.
 2. Montrer que : $\forall P \in \mathbb{R}[X], P(B) = Q^{-1}P(A)Q$.
 3. En déduire que A et B ont les mêmes polynômes annulateurs.
 2. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{R}^r$ ($r \leq n$) des réels distincts deux à deux et $(m_1, \dots, m_r) \in (\mathbb{N}^*)^r$ tels que :
 $m_1 + \dots + m_r = n$ On pose :
 $D = \mathrm{diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_1 \text{ termes}}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_2 \text{ termes}}, \dots, \underbrace{\lambda_r, \dots, \lambda_r}_{m_r \text{ termes}})$

termes}}{\underbrace{\lambda_{r},\dots,\lambda_{r}}})\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})

1. Montrer que :

$\forall P \in \mathbb{R}[X], \exists P(D) = \text{diag}(\underbrace{m_1}_{\text{termes}}, \dots, \underbrace{m_r}_{\text{termes}})$

2. En déduire que une CNS pour que P soit un polynôme annulateur de D .

3. On suppose que A est semblable à D . Déterminer le polynôme unitaire de plus bas degré P_A tel que $P_A(A) = \Theta$.

[Appli liné >](#) [Généralités](#) [Poly annul](#) [Matrice](#) [Chang base](#)

From: <https://alainguichet.fr/ecs-touchard/wiki/> - ECS Touchard-Washington Le Mans

Permanent link: https://alainguichet.fr/ecs-touchard/wiki/doku.php?id=math:2:changement_de_bases&rev=1589138352

Last update: 2020/05/10 21:19

